

УДК 551.24+551.25:539.3

## **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У МОДЕЛЮВАННІ МЕХАНІЗМІВ ФОРМУВАННЯ СТРУКТУР ЗЕМЛІ**

**В. Фурман, М. Хом'як, Л. Хом'як**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Грушевського, 4, 79005 м. Львів, Україна  
[fourman@franko.lviv.ua](mailto:fourman@franko.lviv.ua)*

Для обчислення гравітаційних аномалій геологічних тіл складної геометрії з різними густинами розвинуто техніку числового інтегрування з використанням скінченноелементного підходу та формул Гаусса, для двовимірного випадку запропоновано алгоритм побудови профілів (пряма задача гравіметрії), орієнтований для програми MS Excel. Його програмну реалізацію мовою VBA використано для розв'язування низки тестових і модельних задач. Зазначено про перспективу подальших досліджень стосовно реалістичніших тривимірних задач, а також розвитку програмного забезпечення.

*Ключові слова:* гравіка, структури землі, моделювання, глибинні процеси, фізичне моделювання, глибинна структура.

Сейсмічне зображення не дає змоги визначити фізичні параметри середовища (і в цьому принципова відмінність зображення від моделі), проте за його допомогою можна успішно вирішувати структурні геологічні завдання та підготувати вихідний матеріал для вирішення завдань третього типу – завдань класифікації. Необхідно чітко визначити принципи відбору раціональних розв'язків відповідних задач прояву фізичних полів Землі та фізичної природи явищ у геологічних структурах літосфери й продовжувати дослідження зі створення методик порівняльного аналізу розв'язку фізичних задач у реальних геологічних системах різної складності та структури. У методиках комп'ютерного моделювання треба враховувати вплив таких реологічних параметрів геологічного середовища, як шаруватість, анізотропія, пластичність та в'язкість, на локальному й регіональному рівнях стосовно задач тектонофізики. Зрозуміло, що зазначена закономірність виявляється по-різному під час використання полів різних типів. Однак її можна так чи інакше простежити і в гравіметричних, магнітометричних, сейсмометричних та електрометричних дослідженнях [4, 6–9]. Наприклад, у регіональних дослідженнях головна мета гравіметричного методу – побудова щільнісної моделі земної кори. У вивченні локальних структур можливості кількісної інтерпретації зменшуються внаслідок більшої складності досліджуваних об'єктів, а саме – через їхній взаємний вплив у гравітаційному полі. Тут ситуацію, зазвичай, може змінити використання матеріалів інших геофізичних методів, тобто комплексування різних геофізичних методів. У детальних гравіметричних дослідженнях, наприклад, у рудних районах провідну роль починають відігравати геофізичні аномалії [5, 7, 9].

Під час регіональних сейсмічних досліджень, наприклад, для глибинного сейсмічного зондування головне завдання полягає в побудові швидкісної моделі земної кори. У граничному випадку дрібномасштабних досліджень – вивчення Землі загалом – завдання побудови швидкісної моделі також домінує. Однак для вивчення локальних структур [3, 5, 7] головну інформацію дає вирішення завдання побудови сейсмічного зображення. Водночас зазначимо про зміну послідовності вирішення геофізичних завдань для різних масштабів досліджень. У регіональних геофізичних дослідженнях першим вирішують завдання картування та класифікації території на великі структури, потім – детальніше вимірювання характеристик кожної з цих структур, після чого виконують головне завдання – побудову фізичної моделі

Геофізика як наука про вимірювання об'єктів геологічного середовища відрізняється від фізики, що вивчає об'єкти, доступні лише для кількісного вимірювання, тим, що охоплює не лише кількісні вимірювання, а й порівняльні та класифікаційні. Це пов'язано з тим, що під час геофізичних вимірювань часто може не бути головного атрибута кількісних вимірювань – моделі похибок. Розвинуто теоретичні основи та програмне забезпечення для методики комплексного аналізу результатів скінченноелементного 2D- та 3D-моделювання у корі та мантії Землі з неоднорідним розподілом густини.

Нові уявлення про механізми появи і перетворення блокових структур під час зсувного деформування спочатку суцільного матеріалу, що є в умовах усебічного нерівномірного стиску, отримані [1, 6, 8] внаслідок дослідження процесу подрібнення (тобто утворення безлічі тріщин) зразка за умов деформаційного стискання в товстостінній свинцевій оболонці. Досліджені в цих експериментах фізичні явища характерні для процесів, масштаб яких зумовлений зонами всебічного стиснення, що переважають у земній корі і створюють уявлення про механізми перетворення блокових структур у розломних зонах інтенсивних зсувних деформацій. Тектонічні і геофізичні процеси значно спричинені динамікою рухів земної кори, тому необхідно хоча б коротко схарактеризувати ті фізичні процеси, що їх формують.

**Комп'ютерна симуляція гравітаційних аномалій на засадах скінченноелементного підходу.** У разі комп'ютерного моделювання існує потреба в достатньо простому програмному забезпеченні (дружній інтерфейс та мінімальні затрати часу на вивчення), широкодоступному, зокрема, з фінансового погляду. Спеціалізовані модулі могли б бути розроблені на основі таких відомих програм інженерного та математичного моделювання, як MatLab чи Maple, однак, поза сумнівом, переважна більшість користувачів ПК ознайомлені саме з електронними таблицями Excel, що входять у пакет Microsoft Office. Додаткові можливості стосовно моделювання в геофізиці можна реалізувати програмною мовою VBA, що є діалектом мови високого рівня Basic, легким у вивченні та розумінні навіть для непрофесіоналів у програмуванні. З іншого боку, тут підготовка інформації, вирішення завдання, отримання результатів та їхня візуалізація можуть бути організовані одним потоком і в одній програмі за принципом “прозорого” ящика (на відміну від комерційного програмного забезпечення, організованого переважно як “чорний ящик”, що ховає деталі реалізації).

Як відомо [1, 2, 5], аномалію вертикальної складової прискорення сили тяжіння (далі просто аномалію сили тяжіння) для одиничної маси в точці  $A(x', y', z')$  з боку точкового джерела аномалії з масою  $dm$ , розміщеного в точці  $M(x, y, z)$ , обчислюють за формулою

$$\Delta g = G \frac{(z' - z) dm}{R^3}, \quad dm = (\rho - \rho_0) dV, \quad (1)$$

де  $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ ;  $dV = \Delta x \Delta y \Delta z$  – малий елемент об'єму;  $(\rho - \rho_0)$  – позірна густина, яка дорівнює різниці густин порід  $\rho$ , що утворюють аномалію, та густини навколишніх порід  $\rho_0$ ;  $R = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$  – відстань між точками  $A$  та  $M$ . Аномальні значення  $\Delta g$  вимірюють у мілігалах (1 мгал =  $10^{-5} \text{ м/с}^2$ ) або в мікрогалах (1 мкгал = 0,001 мгал), що дають порядок точності сучасних гравіметрів (типу CG-5) близько 5–10 мкгал [5]. Для комп'ютерного моделювання з метою запобігання втраті точності обчислень в операціях з малими порядками одиниці вимірювання вхідних даних зручно вибрати так: густина – у грамах на сантиметр кубічний [ $\text{г/см}^3 = \text{тон/м}^3$ ], координати і відстані – у метрах; тоді  $\Delta g$  отримуватимемо в мілігалах, якщо взяти числове значення  $G = 6,67259 \cdot 10^{-3}$ . Оскільки формула (1) містить різницю координат точок  $A$  та  $M$ , то значення  $\Delta g$  не залежить від вибору початку системи координат (очевидно, і від виду самої системи координат, наприклад, циліндричної чи сферичної). Тому завжди можна ввести локальну картезіанську систему координат з початком у точці  $A$ , де осі  $x$  та  $y$  орієнтовані в горизонтальній площині, а  $z$  відображає відносну глибину точки  $M$ . Тоді формули для обчислення  $\Delta g$  в точці  $A(0,0,0)$  дещо спрощуються, наприклад, для аномального тіла довільної форми маємо

$$\Delta g = G \int_V \frac{z}{R^3} (\rho - \rho_0) dx dy dz, \quad (2)$$

де  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – радіус-вектор точки  $M$  відносно точки  $A$ . Відомо багато аналітичних розв'язків для інтеграла в (2) стосовно тіл простої форми (куля, блок, циліндр, шар), скінченних розмірів чи нескінченних в одному з напрямів [1, 2], деякі з них використано далі. Для важливого двовимірного випадку нескінченного тіла, наприклад, у напрямі  $y$ , коли можна скористатися гіпотезою рівноправності вертикальних перерізів, замість формули (2) матимемо

$$\Delta g = 2G \int_S \frac{z}{r^2} (\rho - \rho_0) dx dz, \quad (3)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ,  $V = S \times (-\infty; +\infty)$  – уявлення об'єму через прямий добуток поперечного перерізу  $S$  для тіл нескінченної протяжності вздовж  $y \in (-\infty; +\infty)$ .

Для обчислення інтегралів виду (2) і (3) використовують [10]:

- 1) властивість адитивності інтеграла, розбиваючи тіло складної форми (джерело аномалії) на геометрично прості тіла;
- 2) заміну об'ємних інтегралів інтегралами по поверхні (у двовимірному випадку: заміну інтегралів по області контурними);
- 3) аналітичні результати для інтегралів, які можна легко знайти, або наближене інтегрування одним з числових методів.

Практично важливим підходом до комп'ютерного моделювання гравітаційних аномалій є використання достатньо універсальних, потужних та апробованих методів, до яких належить метод скінченних елементів, наприклад, для моделювання механічних властивостей Альпійської споруди (рис. 1). Хоча початково його застосовували в зада-

чах визначення напружень і деформацій на засадах варіаційних та енергетичних принципів [3, 4], сьогодні це один зі стандартних числових методів, і ніщо не перешкоджає його використанню (в адаптованому вигляді) в задачах гравіметрії. Наша мета – довести можливість та ефективність застосування скінченноелементного підходу саме в задачах гравіметрії, реалізованого в електронних таблицях Excel, та розв'язування типових задач.

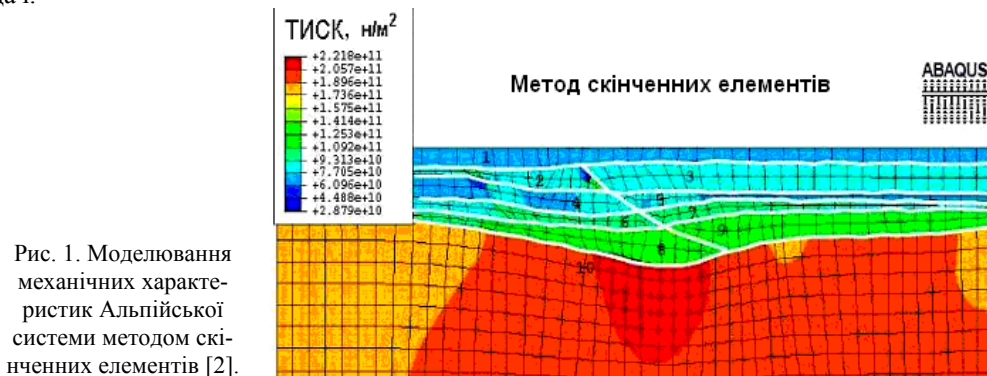


Рис. 1. Моделювання механічних характеристик Альпійської системи методом скінченних елементів [2].

**Застосування методу скінченних елементів.** Ідея методу скінченних елементів (МСЕ) [9, 29] стосовно прямої задачі гравіметрії полягає в такому (2D-випадак):

- розбиття області  $S$  на чотирикутні та трикутні елементи, що не перетинаються:  

$$S = \bigcup_i S_i, S_i \cap S_j = 0, i \neq j,$$

і зображення аномалії  $\Delta g$  як суми скінченної кількості внесків окремих елементів:

$$\Delta g = G \sum_i \Delta \rho_i \int_{S_i} \frac{z}{r^2} dS_i, \quad (4)$$

де  $\Delta \rho_i = \rho - \rho_0$  – середнє значення позірної густини на  $i$ -му елементі.

- відображення кожного з елементів на стандартний одиничний елемент у три- чи двовимірному просторі, локальні координати якого змінюються в межах від  $-1$  до  $+1$ :

$$[x, z] = \sum_k N_k(\xi, \eta) [x_k, z_k], \quad (5)$$

де  $x_k$  –  $x$ -координати  $k$ -ї вершини одного з елементів (аналогічно для координати  $z_k$ );  $N_k$  – функції форми елемента, кількість та вид яких залежать від вибраної сім'ї скінченних елементів та порядку апроксимації. Найчастіше використовують сім'ю елементів лінійного або квадратичного типу (зрідка кубічного) по кожній з локальних змінних [2, 10]. Тут для задач гравіметрії раціонально обмежитися лінійними функціями форми, що дає змогу точно відобразити контур, складений з прямолінійних відрізків, що, однак, не обмежує загальності підходу щодо апроксимації криволінійної геометрії. Для прикладу наведемо загальну формулу білінійних сплайн-функцій на одному елементі

$$N_i(\xi, \eta) = (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) / 4, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (6)$$

де  $\xi_1 = \xi_4 = \eta_1 = \eta_2 = -1$ ,  $\xi_2 = \xi_3 = \eta_3 = \eta_4 = 1$  – параметри, що відповідають  $(\xi, \eta)$ -координатам чотирьох вершин стандартного одиничного елемента (у порядку обходу).

Важливою властивістю функцій форми є те, що вони набувають значення 1 у відповідному вузлі елемента і дорівнюють нулю в усіх інших:

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = 1, N_i(\xi_j, \eta_j) = 0, i \neq j. \quad (7)$$

3) числовому інтегруванні з використанням квадратурних формул.

Серед багатьох квадратурних формул перевагу часто надають формулам Гаусса порядку  $n$ , що є точними для поліномів степеня  $2n - 1$  (іншими словами, мають найвищу точність у класі поліномів):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) d\xi = \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{k=1}^n w_k f_k + O(b-a)^{2n}, \quad (8)$$

де  $f_k$  – значення підінтегральної функції в точці Гаусса з локальними координатами  $\xi_k$ ;  $w_k$  – вагові коефіцієнти. Для двовимірного випадку формулу (8) узагальнюють за ієрархічним принципом

$$\int_{\xi^{(0)}, \eta^{(0)}}^{\xi^{(1)}, \eta^{(1)}} f(x, y) dx dy dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) |J_2| d\xi d\eta \approx \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_k w_l f(\xi_k, \eta_l) |J_{2,kl}|, \quad (9)$$

де  $[J_2] = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\xi, \eta)}$  – якобіан переходу від глобальних координат  $(x, z)$  до локальних  $(\xi, \eta)$ ,

що чисельно дорівнює відношенню площ елемента  $S_i$  та стандартного елемента  $(2 \times 2 = 4)$ . Для наших досліджень обмежимося одноточковою формулою ( $n = 1$ ) в локальній точці  $\xi_1, \eta_1 = 0$  з ваговим коефіцієнтом  $2 \times 2 = 4$ , що точна для білінійного наближення підінтегральної функції. Як доведемо далі, цього часто цілком достатньо для практичних обчислень, а отже, знаходження інтеграла (9) замінюємо сумою добутків підінтегральної функції (7) в центральній точці елемента на його площу (теорема про середнє).

Особливо ефективним такий підхід буде для прямокутних елементів, для яких легко наперед оцінити їхню площу. Якщо потрібно підвищити точність інтегрування, то можна використовувати формулу Гаусса другого порядку з локальними координатами  $\xi_k, \eta_k = \pm 0,57735 = \pm 1/\sqrt{3}$ ,  $k = 1, 2$  та вагами  $w_k = 1$ , яка буде точною вже для бікубічного наближення підінтегральної функції. Тоді квадратурні формули (9) зводяться фактично до підсумування добутків підінтегральної функції (8) на відповідний якобіан переходу (який можна обчислити один раз для всіх елементів) у чотирьох точках Гаусса. Зазначимо, що тут враховано гіпотезу про сталість позірної густини в межах одного елемента (блока), тому  $(\rho - \rho_0)$  можна винести за знак інтеграла на елементі. Перевагою формул числового інтегрування є також те, що для знаходження підінтегральної функції потрібно виконувати операції множення і ділення, тоді як використання результатів аналітичного інтегрування охоплює "громіздкі" операції знаходження логарифмічних, обернених тригонометричних функцій тощо. Наприклад, для прямокутника з протилежними кутами в точках  $(0,0)$  та  $(x_1, z_1)$

$$\Delta g = 2G(\sigma - \sigma_0) z_1 F_5(x_1 / z_1), \quad F_5(p) = \arctan(p) + 0,5p \ln(1 + 1/p^2).$$

**Алгоритм та програмна реалізація знаходження  $\Delta g$  в електронних таблицях.** Наведемо достатньо універсальний програмний код обчислення  $\Delta g$  з використанням скінченноелементного (СЕ) підходу, адаптований для електронних таблиць Excel. Для

всіх елементів використано квадратурні формули Гаусса другого порядку, що забезпечує достатньо високу точність обчислення, хоча для спрощення алгоритму самого контролю точності тут не передбачено. Як засвідчують практичні розрахунки, використання складніших, але точніших формул Гаусса (чотириточкової замість одноточкової) не впливає критично на час розрахунку для сучасних комп'ютерів.

Формально алгоритм (далі FEM\_dg) відображає такий псевдокод.

0. Ініціалізація масивів координат вузлів (**rCoord**), зв'язності вузлів на елементі (**rElements**), густин порід (**rDensity**) і точок профілю (**rProfile**) та занулення масиву аномалій  $\Delta g$  у точках профілю за заданими діапазонами клітинок в Ексел (структуру цих масивів відображено на рис. 2).

1. Цикл по точках профілю  $i_p = 1, \dots, nPt$  :

$$\Delta g := 0. \text{ Глобальні координати точки } (x_g, z_g).$$

2. Цикл підсумовування внесків окремих елементів,  $el := 1, \dots, nEl$  :

$$IDmat := \mathbf{rElements}(el, 2); \quad \rho_{el} := \mathbf{rDensity}(IDmat, 2) - \rho_0;$$

3. Цикл по точках інтегрування,  $k = 1, \dots, 4$  :

$$- \text{визначення глобальних координат } (x_k, z_k) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_k, \eta_k)(\hat{x}_i, \hat{z}_i),$$

де  $(\hat{x}_i, \hat{z}_i) := (\mathbf{rCoord}(node, 2), \mathbf{rCoord}(node, 3))$  – координати вузлів на елементі  $el$ , що визначені за номером вузла  $node := \mathbf{rElements}(el, i+2)$  та масивом координат **rCoord**;

– перехід до локальних координат відносно точки на профілі  $(x := x - x_g, z := z - z_g)$ ;

– знаходження якобіана:

$$J_{2,k} = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)} \right| = \begin{vmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi_k, \eta_k) \hat{x}_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi_k, \eta_k) \hat{z}_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi_k, \eta_k) \hat{x}_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi_k, \eta_k) \hat{z}_i \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4;$$

– обчислення підінтегральної функції та підсумовування внеску в активній точці Гаусса:  $\Delta g := \Delta g + \rho_{el} \frac{z_k}{x_k^2 + z_k^2} J_{2,k}$ .

4. Завершення внутрішніх циклів по  $k$  та  $el$  (чи перехід до пунктів 3 і 2, відповідно).
5. Друкування або збереження  $\Delta g$ ;  $i_p = i_p + 1$  і перейти до пункту 1 або Stop, якщо  $i_p = nPt$ .

Опишемо коротко структуру масивів вхідних даних. Передусім, на одному з аркушів електронних таблиць потрібно сформувати масив **rCoord**, який містить глобальні координати вузлів розбиття скінченноелементної моделі тіла, що породжує аномалію  $\Delta g$ . Кількість рядків має дорівнювати кількості вузлів; у рядку (усього три клітинки) міститься порядковий номер вузла та його координати  $(x, z)$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	РОЗБИТТЯ прямокутного БЛОКА												
3													
4													
5			Уздовж										
6	Координати		X		Y								
7			Позначення	Величина	Позначення	Величина							
8		min	<=0	0	y0	-20							
9		max	<=1	500	y1	-10							
10	trokiv N	Nx	50	Ny	1								
11													
12	Матеріал ID	<input type="text" value="1"/>											
13													
14		Розрахувати координати вузлів					Розрахувати зв'язність вузлів по елементно						
15		↓					↓						
16													
17													
18													
19													
20		№ вузла	X	Y		ELEM	MAT	NODES					
21		1	0	-20		1	1	1	2	53	52		
22		2	10	-20		2	1	2	3	54	53		
23		3	20	-20		3	1	3	4	55	54		
24		4	30	-20		4	1	4	5	56	55		
25		5	40	-20		5	1	5	6	57	56		
26		6	50	-20		6	1	6	7	58	57		
27		7	60	-20		7	1	7	8	59	58		
28		8	70	-20		8	1	8	9	60	59		
29		9	80	-20		9	1	9	10	61	60		
30		10	90	-20		10	1	10	11	62	61		

Рис. 2. Структура інформації про скінченноелементне розбиття.

Масив зв'язності вузлів (на елементі) **rElements** має стільки рядків, скільки є елементів розбиття; інформація про зв'язність вузлів на окремому елементі міститься в одному рядку й охоплює номер елемента, індекс матеріалу (густину порід вважаємо сталою на елементі) та глобальні номери вузлів, що визначають порядок відображення на стандартний елемент. Один з найпростіших способів розбиття на елементи прямокутника з заданою кількістю елементів на протилежних сторонах та правилом нумерації вузлів лініями (знизу вгору) реалізовано програмно, що дає змогу ефективно моделювати тестові та достатньо складні модельні задачі (рис. 3). Зазначимо, що геометрично складну фігуру часто можна зобразити як об'єднання прямокутників, для яких можна генерувати SE-модель описаним вище програмним способом, якщо передбачити зміщення для стартового номера вузла q елемента кожного з прямокутників. Тоді важливо, щоб не було пропусків у наскрізній нумерації вузлів та елементів. Відповідні перевірки коректності даних для спрощення алгоритму тут не наведено.

Структура інших масивів очевидна: масив густин **rDensity** є базою даних про густину породи з ідентифікатором IDmat (номер рядка) та, можливо, описом порід, причому перший запис повинен містити густину вмісних порід. Масив координат точок (x,z) на профілі **rProfile** формується в електронних таблицях або вручну, або програмно, розбиваючи відрізок на однакові частини (крайні точки й кількість відрізків задано). Навпроти координат точок профілю виводимо результат – значення  $\Delta g$ .

Графік залежності  $\Delta g$  вздовж профілю будуємо засобами Excel, причому в разі перерахунку його буде автоматично оновлено, що зручно для моделювання з різними варіантами даних. Інформацію про адреси діапазонів клітинок вхідних масивів у вигляді рядків розміщують в таблиці метаданих задачі, з якими працює підпрограма FEM\_dg (див. рис. 3).

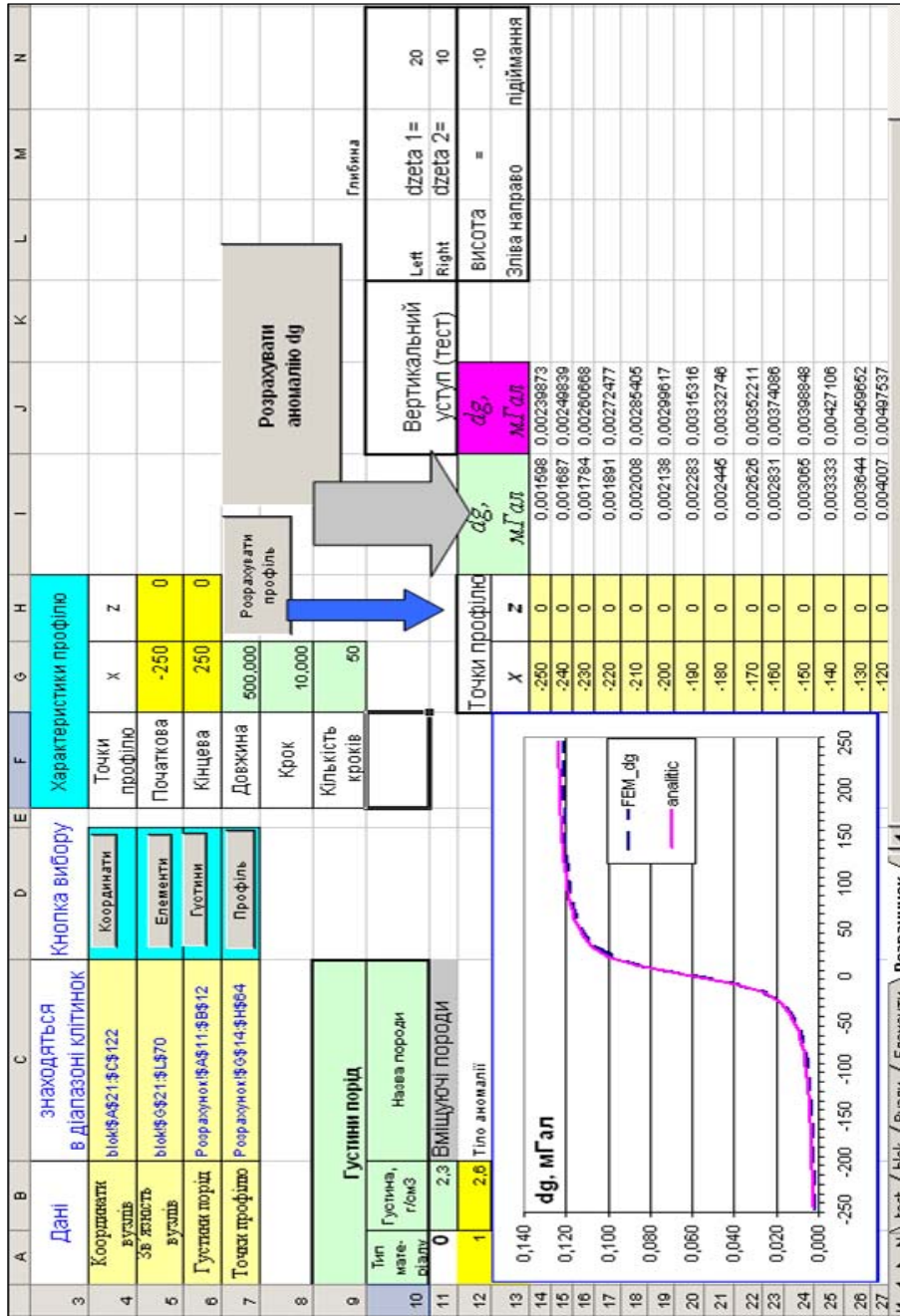


Рис. 3. Організація розрахунку Dg в електронних таблицях.

Підпрограму FEM\_dg зручно викликати натисненням програмної кнопки, розміщеної поряд. Така організація обчислень дає змогу поєднати звичний інтерфейс програми



Excel та її можливості візуалізації зі спеціалізованим алгоритмом розрахунку прямої задачі гравіметрії, що зменшує час навчання для роботи з цією функціональністю практично до нуля для користувача комп'ютера, що знає теоретичні засади методу.

**Модельний приклад.** Не обмежуючи загальності підходу, обмежимося 2D-випадком, для якого характерними, зокрема, є менш громіздкі формули, що породжує інтеграл вигляду (8). На рис. 4, *a* зображено модельну задачу для дослідження аномалій прискорення тяжіння, зумовлену відмінностями густин осадових порід  $\rho(x, z)$  та фундаменту басейну  $\rho_0$ . Цей вертикальний розріз характерний для регіону Українських Карпат (значно спрощено і схематизовано), ідею якого підказано відомими картографічними даними (геотраверс II), що не перетинаються, інформацію про кутові точки яких занесено в базу даних і використано для побудови сітки скінченних елементів, яку за потреби можна згущувати, наприклад, удвічі (для визначення практичної точності методу числового інтегрування).

Практичну апробацію запропонованого алгоритму виконано на скінченноелементній сітці, що складається з 757 елементів і містить 1 204 вузли. Її побудовано програмним способом на основі стандартної процедури МСЕ [2, 10], що зводиться до відображення точок одиничного елемента на довільний елемент, заданий своїми вузлами (програмний код тут не наведено). Зазначимо, що для прямої задачі гравіметрії немає потреби в узгодженні розбиття сусідніх елементів, хоча для оберненої задачі, де невідомі середні густини на кожному елементі, таке узгодження було б принаймні бажаним; і саме такі сітки будують у класичному МСЕ.

Модель складена з 35 довільно орієнтованих чотирикутників (суперелементів). Середнє значення густин усіх суперелементів (крім 21–23, див. рис. 4, *a*) вибрано однаковими,  $\rho = 2,57 \text{ г/см}^3$ , а порід фундаменту (а також блоків 21–23) –  $\rho_0 = 2,7 \text{ г/см}^3$ . Початок системи координат вибрано на поверхні між 24- і 25-м суперелементом, профіль довжиною 130 км містить точки через 500 м. Час обчислення безпосередньо програмою, що відповідає запропонованому алгоритму 1, є достатньо значним (на комп'ютері з процесором Pentium III і оперативною пам'яттю 512 Мбайт – до 40 хв), що пов'язано з неефективним використанням клітинок електронних таблиць з даними про координати вузлів елемента як двовимірних масивів. Однак цей програмний код легко оптимізувати, якщо поміняти місцями вкладені цикли по точках профілю та елементах так, що кожен елемент опрацьовувався б один раз і розсилав свої внески в усі точки профілю. Такий оптимізований алгоритм реалізовано і час виявився приблизно в 20 разів(!) меншим (для чотирьох точок Гаусса), а надалі його зменшено ще в 3 рази (у випадку тільки однієї точки Гаусса).

Для нашого випадку час обчислень доведено до 40 с, хоча й це ще не обмеження, проте вже достатньо прийнятний варіант, якщо зважити, що найбільші часові затрати і відповідальність потрібно приділити побудові скінченноелементної моделі. Навіть на підготовку вручну інформації про суперелементи, аналогічно до рис. 4, затрати вимірюватимуться годинами, хоча це можна вважати й одноразовою операцією. Отримана якісна картина регіональної аномалії показана на рис. 4, *б*. Нижній графік містить осциляції, зумовлені числовим інтегруванням верхнього шару елементів (блоки 23–35), які розбито лише на один елемент по товщині. Якщо задати для них нульову позірну густину  $\rho - \rho_0 = 0$ , то отримаємо верхній графік, який практично не містить таких осциляцій, тобто вплив від глибших елементів згладжується. Якісно отримані графіки  $\Delta g$  відпові-

дають регіональній аномалії, а по порядку – навіть числовим значенням, що підтверджує вірогідність результатів комп'ютерної симуляції.

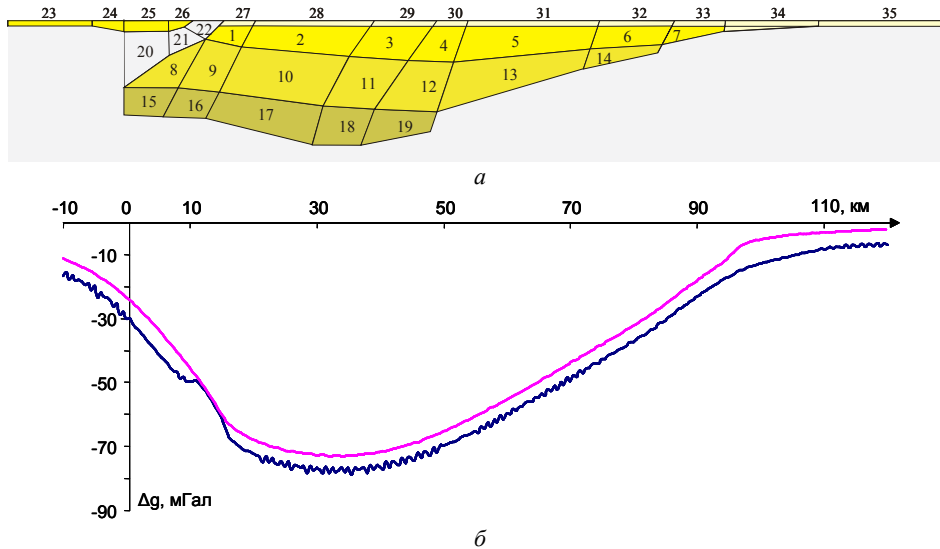


Рис. 4. Блокова модель густини, побудована на основі геотраверсів [1] через Українські Карпати, – основа для побудови скінченноелементного розбиття (а); графіки  $\Delta g$  з урахуванням (нижня лінія) та без урахування (верхня лінія) приповерхневого шару (б).

Отже, ми запропонували і практично апробували алгоритм числового розв'язування прямої задачі гравіметрії з використанням скінченноелементного підходу, адаптований для застосування з електронними таблицями, що робить його доступним для широкого кола користувачів, зокрема, і з навчальною метою. Назвемо такі його переваги: довільна геометрична форма і неоднорідність тіл з аномальними масами, простота та алгоритмічність обчислень, узгодження потоку вхідної інформації з формою даних сучасних програм методу скінченних елементів, що дає змогу використовувати готові моделі СЕ-розбиття; зображення підінтегральної функції у вигляді сплайн-поліномів (білінійних) на кожному з елементів достатнє за точністю в переважній області, крім зони, близької до точки спостереження (у межах семи-десяти діаметрів СЕ-розбиття для відносної точності від 5 до 1 %). У найближчій перспективі – розрахунок 2,5-D і 3-D тіл, тобто достатньо протяжних, але обмежених аномальних мас (2,5-D випадок) або реальних просторових моделей скінченного простягання (3-D випадок), оптимізація роботи алгоритму, підпрограми побудови скінченноелементних моделей в електронних таблицях.

Апробовану методику числового розв'язування оберненої задачі гравіметрії на підставі розв'язування прямої задачі й урахування локальної похибки апроксимації області методом скінченних елементів можна об'єднати за структурою для розв'язування інтегральної задачі, а саме – розподілу термомеханічних характеристик середовищ кори і мантії Землі, реологічно неоднорідних, для повнішого інформативного відображення структурних особливостей і даних про просторово-часовий розподіл густини, температури і тисків. У методиці комп'ютерного моделювання враховано вплив таких реологіч-

них параметрів геологічного середовища, як шаруватість, анізотропія, пластичність та в'язкість у розподілі геодинамічних, термоконвективних і механічних характеристик геологічних структур на локальному й регіональному рівнях стосовно задач тектонофізики для моделювання.

Звичайно ж, поки що ця модель може слугувати тільки як нульове наближення, її результати не треба інтерпретувати безпосередньо для реальних геологічних об'єктів. Однак за умови врахування топографії, внесення необхідних поправок, уточнення розподілу густин, звіряння з наявними геолого-геофізичними даними, а також у разі переходу до тривимірних моделей можна стверджувати про хорошу перспективу таких уточнених об'єднаних моделей взаємозв'язку геодинамічних, термоконвективних та механічних характеристик геологічних структур гірських споруд і методів їхнього дослідження на підставі запропонованого, достатньо простого алгоритму і відповідного оптимізованого програмного забезпечення.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bercovici, D. et al.* Energetics of a two-phase model of lithospheric damage, shear localization and plate-boundary formation // *Geophys. J. Intern.* – 2003. – V.52.– P. 581–596.
2. *Ebbing J et al.* Forward and inverse modelling of gravity revealing insight into crustal structures of the Eastern Alps // *Tectonophysics.* – 2001. – Vol. 337.– N 3–s4. – P. 191–208.
3. *Handy M.R. et al.* Reconciling plate-tectonic reconstructions of Alpine Tethys with the geological–geophysical record of spreading and subduction in the Alps // *Earth-Science Reviews.* – 2010. – Vol.102. – P. 121–158.
4. *Heuret A. et al.* Plate kinematics, slab shape and back-arc stress: A comparison between laboratory models and current subduction zones // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2007. – Vol. 256. – P.473–483
5. *Pascal C., Cloetingh S.,* Gravitational potential stresses and stress field of passivecontinental margins: Insights from the south-Norway shelf // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2009. Vol. 277. – P. 464–473.
6. *Raykova R.B., Panza G.F.* Surface waves tomography and non-linear inversion in the southeast Carpathians// *Phys. of the Earth and Plan. Int.* – 2006. – Vol. 157. – P. 164–180.
7. *Russo R.M. et al* Seismic attenuation in the Carpathian bend zone and surroundings // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2005. – Vol. 237. – P. 695–709.
8. *Schmid S.M., Kissling E,* The arc of the western Alps in the light of geophysical data on deep crustal structure // *Tectonics.* – 2000. – Vol. 19 (1). – P. 62–85.
9. *Suetsugu D., Saita T., Takenaka H., Niud F.* Thickness of the mantle transition zone beneath the South Pacific as inferred from analyses of ScS reverberated and Ps converted waves // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2004. Vol. – 146. – P. 35–46..
10. *H.L. Xing et al.* Finite element modeling of interacting fault systems // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 2007. – Vol. 163. – P. 106–121.

Стаття: надійшла до редакції 11.05.2017,

доопрацьована 25.05.2017,

прийнята до друку 26.05.2017.

**APPLICATION FINITE ELEMENT METHOD IN MODELING FORMATION  
MECHANISMS OF THE EARTH'S STRUCTURES****V. Fourman, M. Khomjak, L. Khomjak**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Hrushevskij Str. 4, UA – 79005 Lviv, Ukraine.  
[fourman@franko.lviv.ua](mailto:fourman@franko.lviv.ua)*

The numeral integration technique to calculate the gravity anomalies of the geological bodies of complex geometry and different densities using the finite element approach and Gauss' formulas is developed. In the two-dimensional case the solution algorithm of the direct gravity problem based on MS Excel is proposed. Its implementation in the program language VBA to simulate the test and modelling problems is used. The prospect of the further researches relatively more realistic three-dimensional problems as soon as software development is specified.

Proven technique of numerical solving of the inverse problem of gravimetry on the basis of solving a direct problem and taking into account the local error of approximation of the region by finite elements method can be combined according to the structure for solving an integral problem, namely, the distribution of the thermomechanical characteristics of the Earth's crust and mantle environments, rheologically heterogeneous, for a more comprehensive informative mapping of structural features and data on the spatial-temporal distribution of density, temperature and pressure. In the computer modeling method, the influence of such rheological parameters of the geological environment as layering, anisotropy, ductility and viscosity in the distribution of geodynamic, thermoconvertible and mechanical characteristics of geological structures at the local and regional levels in relation to the tasks of tectonophysics for modeling are taken into account. Of course, while this model can serve only as a zero approximation, its results need not be interpreted directly for real geological objects. However, if the topography is taken into account, the necessary amendments are made, specification of the distribution of densities, reconciliation with available geological and geophysical data, and also in the case of transition to three-dimensional models can be argued about the good prospect of such revised combined models of the interconnection of geodynamic, thermoconvex and mechanical characteristics geological structures of mountain structures and methods of their research on the basis of the proposed, rather simple algorithm and corresponding optimized software.

*Key words:* Gravity, structure of the Earth, modeling, physical modeling, deep structure.