

ДИНАМІЧНІ РЕЖИМИ НЕСУМІРНОЇ НАДСТРУКТУРИ КРИСТАЛА $[N(CH_3)_4]_2CuCl_4$

І. Карпа, С. Свелеба, І. Катеринчук, Я. Шмигельський, І. Куньо, О. Жилін

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
incomlviv@gmail.com*

Досліджено ознаки динамічних режимів неоднорідних структур, які описують термодинамічним потенціалом з інваріантом Лівшиця без використання наближення постійної амплітуди параметра порядку, а також вплив осциляцій амплітудної функції на розподіл фази параметра порядку в моделі, яка описує періодичні структури в сегнетоелектриках та сегнетоеластиках.

З'ясовано, що для цього типу несумірних структур старший показник Ляпунова переважно додатний, що є ознакою наявності в системі хаотичних режимів. Отримані карти динамічних режимів якісно подібні й мають граничні цикли з сигнатурою спектра ляпуновських характеристичних показників $(+, -, -, -)$; $(+, 0, -, -)$; $(+, +, -, -)$. Незважаючи на те, що система практично завжди хаотична, характер хаотичного режиму змінюється залежно від зміни параметрів T і K . Під час опрацювання даних зафіксовано, що найпоширенішим режимом є гіперхаос з сигнатурою $(++ - -)$.

Ключові слова: несумірна структура, старший показник Ляпунова, хаос.

При дослідженні складної поведінки динамічних систем дуже важливими є кількісні характеристики хаотичної динаміки: фур'є-спектри, фрактальні розмірності хаотичних атракторів, показники Ляпунова. В багатьох випадках тільки вони дають чітке підтвердження існування в системі хаотичних режимів [1,2,3]. Серед цих характеристик показники Ляпунова займають особливе місце. Знання повного спектру показників Ляпунова досліджуваного атрактора дозволяє зробити важливі висновки про його властивості. Спектр показників Ляпунова достовірно визначає розмірність будь-якого типу регулярних атракторів, а для дивних атракторів дає можливість оцінити ляпуновську і фрактальну розмірності [3]. Сигнатура спектра показників Ляпунова є основним інструментом у дослідженні біфуркацій атракторів при зміні параметрів динамічної системи.

Наша мета – розрахунок спектра показників Ляпунова для математичної моделі несумірної надструктури кристала $[N(CH_3)_4]_2CuCl_4$, що задана двома диференціальними рівняннями другого порядку [4]:

$$R'' - R^3 + (1 - \varphi'^2 + T\varphi')R - R^{n-1}K(\cos n\varphi + 1) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi'' + 2\frac{R'}{R}(\varphi' - \frac{T}{2}) + R^{n-2}K \sin n\varphi = 0, \quad (2)$$

де R , φ – безрозмірні змінні, що характеризують амплітудну і фазову функції, T , K – безрозмірні параметри, n – ціле число, що характеризує симетрію потенціалу.

Характеристичні показники Ляпунова дають змогу якісно аналізувати динамічні системи. Існує декілька практичних способів обчислення спектра ляпуновських показників. Основна ідея всіх алгоритмів полягає в стеженні за траєкторіями протягом невеликих проміжків часу й обчисленні швидкостей їхньої розбіжності та подальшого усереднення цих значень за всім атрактором. Проте більшість методів розрахунку характеристичних показників припускають існування аналітичного рішення системи, отримати яке часто важко або взагалі неможливо. Ми розглядаємо чисельний метод обчислення показників Ляпунова за різних початкових умов і значень конструктивних параметрів нелінійної динамічної системи (1), (2).

Працездатний метод оцінки спектра ляпуновських показників можна сконструювати як узагальнення алгоритму Бенеттіна, причому перевизначення векторів збурення повинно не лише полягати у зміні норми, а й супроводжуватися їхньою ортогоналізацією [1, 2].

Систему (1), (2), що складається з двох диференціальних рівнянь другого порядку розв'язували чисельним методом Рунге–Кутта 4-го порядку. Для кожного значення параметра K , що змінювався від 0 до 25, обчислювали показники Ляпунова за початкових векторів збурення $R_0, R'_0, \varphi_0, \varphi'_0$, що є ортогональними між собою та нормовані на одиницю. Після завершення кожного етапу розрахунків проводили ортогоналізацію векторів збурення за методом Грамма–Шмідта і нормалізацію на фіксовану константу. Отриманий спектр показників Ляпунова зображено на рис. 1.

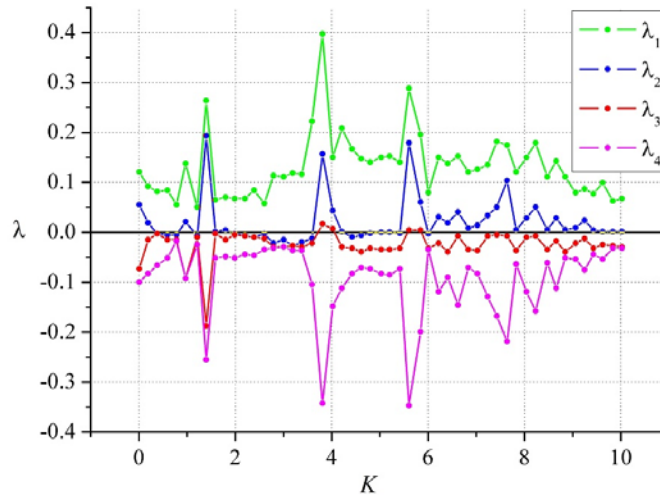


Рис. 1. Спектр показників Ляпунова для системи (1), $R_0 = 0,3$, $R'_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0,75$,
 $T = 1$, $K = 0-10$, $n = 4$.

Хаотичні коливання виникають за умови, що один з показників Ляпунова дорівнює нулю. Гіперхаотичні коливання є за умови, що два показники додатні. З отриманих результатів випливає, що у випадку, коли $K > 6$, система має два додатні показники Ляпунова і, як наслідок, у ній виникають гіперхаотичні коливання. За значень $K = 1,8-3,6$ та $K = 4,4-5,3$ система має один додатний показник Ляпунова, а отже, будуть хаотичні коливання. Наприклад, за значень $K = 1,05$ коефіцієнти Ляпунова мають такі значення: $\lambda_1 =$

$= 0,11323$; $\lambda_2 = 0,00241$; $\lambda_3 = -0,01365$; $\lambda_4 = -0,11018$, а при $K= 1,1$; $\lambda_1 = 0.12528$; $\lambda_2 = -0,47550$; $\lambda_3 = -0,01385$; $\lambda_4 = -0,11511$.

Для великих розмірностей фазового простору кількість можливих режимів збільшується. Наприклад, при $N = 4$, крім дивного атрактора з одним позитивним ляпуновським показником (+, 0, -, -), може бути ситуація, яку називають гіперхаосом: (+, +, 0, -), коли позитивних показників два.

На рис. 2 показано фазові траєкторії в площині R, R' для розглянутої системи, що відповідають наведеним значенням показників Ляпунова. Ці коливання гіперхаотичні.

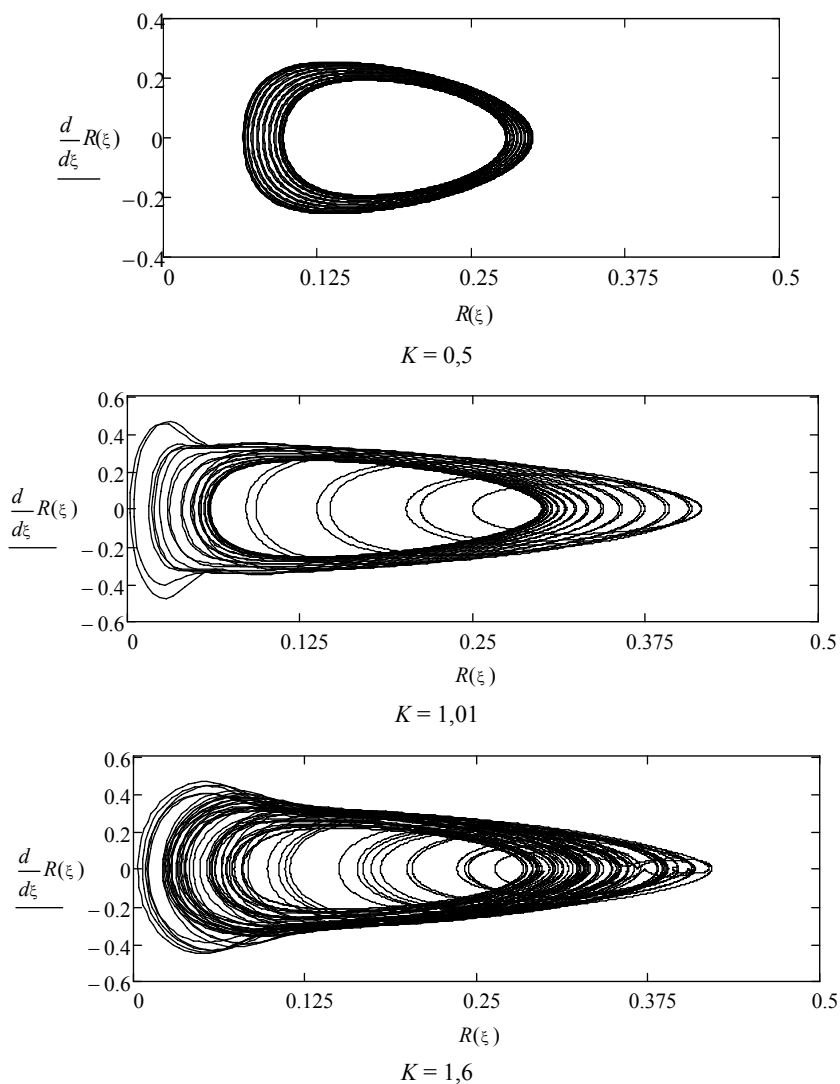


Рис. 2. Фазові траєкторії в площині R, R' за умови $R_0 = 0,3, R'_0 = 0, \varphi_0 = 0, \varphi'_0 = 0,75, T = 1, n = 4$.

Математична модель системи, описуваної функціоналом вільної енергії для модульованих структур, є системою четвертого порядку, для вивчення її динамічних режимів використано комплекс чисельних методів, методика застосування яких для неідеальних динамічних систем наведена в [5]. Для комп'ютерної реалізації зазначених методів розроблено новий програмний пакет.

Побудова карти динамічних режимів є важливим завданням у ході дослідження динамічної системи. Карта динамічних режимів – це діаграма на площині, на координатних осях якої відкладені значення двох довільних (біфуркаційних) параметрів системи і різними кольорами (відтінками кольору) нанесені області існування різних сталих типових динамічних режимів. Під час побудови карти динамічних режимів інтервали зміни біфуркаційних параметрів сканують з досить малим кроком. У кожній сканувальній точці виконують обчислення спектра ляпуновських характеристичних показників (ЛХП), за допомогою якого якісно визначають тип усталеного динамічного режиму. Причому в необхідних випадках для точного визначення типу сталого режиму додатково аналізують інші характеристики атракторів: фазових портретів, перетинів і відображень Пуанкаре, Фур'є-спектрів та ін. Після чого на карту наносять точку відповідного кольору (відтінку кольору) [1].

На рис. 3 зображено карту динамічних режимів досліджуваної системи, побудовану щодо параметрів K і T за значень $n = 4$; $R_0 = 0,3$; $\varphi = 0,75$. Початкові умови змінювались в околиці початку координат фазового простору цієї системи.

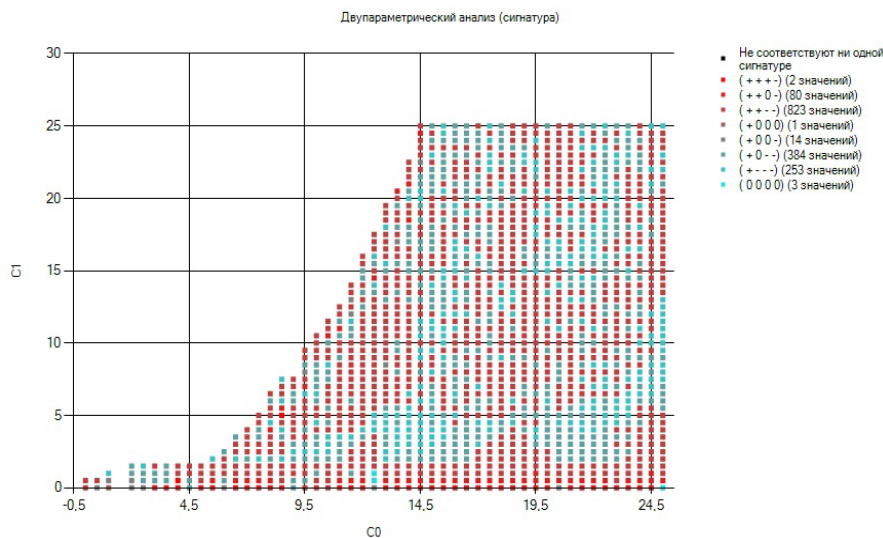


Рис. 3. Карта динамічних режимів досліджуваної системи, побудована для параметрів $K = C_1$ і $T = C_0$ за умови $n = 3$; $R_0 = 0,3$; $\varphi = 0,75$.

На отриманій карті (див. рис. 3) показано області кількох різних типів динамічних режимів. Сигнатура спектра ЛХП положень рівноваги має вигляд $(-, -, -, -)$. Червоним кольором нанесені області значень параметрів K , T , за яких усталеними режимами системи будуть граничні цикли з сигнатурою спектра ЛХП $(+, +, -, -)$. Нарешті, голубим кольором нанесені області, в яких встановленими режимами системи є граничні цикли з

сигнатурою спектра ЛХП (+, -, -, -). Сигнатура спектра ЛХП хаотичних атракторів має вигляд (+, 0, -, -); (+, +, -, -). Згідно з рис. 3, області існування детермінованого хаосу (хаотичних атракторів) займають значну площу на карті динамічних режимів. Це свідчить про те, що детермінований хаос є типовим визначеним режимом цієї системи. Зазначимо, що структури меж областей існування граничних циклів і хаотичних атракторів досить складні й “порізані”. Побудована карта динамічних режимів наочно демонструє взаємне розташування областей існування атракторів різних типів у розглянутій області простору параметрів.

Сигнатура спектра ЛХП виниклого хаотичного атрактора має вигляд (+, 0, -, -). Перехід від регулярного режиму до хаотичного відбувається, можливо, за сценарієм переміжності Помо Манневілья. Зазначимо, що хаотичний атрактор дещо нагадує за формою квазіперіодичні атрактори. Проте між квазіперіодичним і хаотичним атракторами є багато принципових відмінностей. Зокрема, старший ляпуновський показник хаотичного атрактора завжди додатний, а відповідний показник квазіперіодичного атрактора — нульовий. Хаотичний атрактор утворює нестійкі за Ляпуновим траєкторії, а квазіперіодичний — стійкі. Для квазіперіодичного атрактора завжди можна передбачити час повернення траєкторії в заданий окіл атрактора, для хаотичного ж атрактора такі повернення принципово непередбачувані.

На картах динамічних режимів (див. рис. 3, 4) існують дивні атрактори з двома додатними показниками (+, +, 0, -).

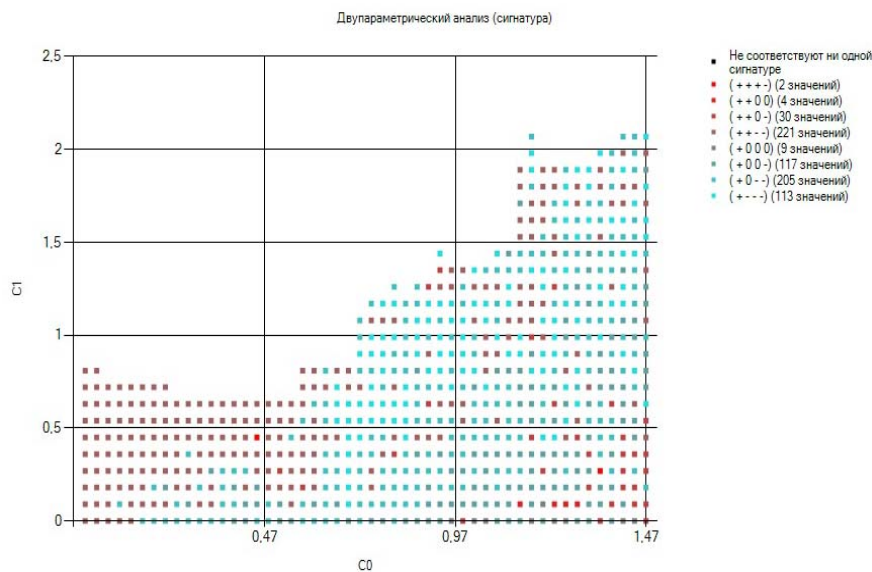


Рис. 4. Карта динамічних режимів досліджуваної системи, побудована щодо параметрів $K = C_1$ і $T = C_0$ за значень $n = 3$; $R_0 = 0.3$; $\varphi^2 = 0.75$.

Отже, розраховано спектри показників Ляпунова за допомогою алгоритму Бенетина для гіперхаотичної системи. Отримані результати дають змогу визначити значення параметрів системи, за яких забезпечені хаотичні та гіперхаотичні види коливаний.

З'ясовано, що області існування детермінованого хаосу займають значну площу на карті динамічних режимів. Це свідчить про те, що детермінований хаос є типовим усталеним режимом цієї системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. – М. : Физматлит, 2001. – 296 с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания : Пер. с англ / Ф. Мун – М. : Наука, 1990. – 312 с.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах / В.С. Анищенко – М. : Наука, 1990. – 312 с.
4. Карпа І. Вплив механічних напружень на неоднорідні стани в мікрокристалах з не-сумірною надструктурою / І. Карпа, С. Свелеба, І. Катеринчук, Я. Шмигельський, І. Куньо, О. Фіщич // Електроніка та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 4. – С. 103–110.
5. Жилін О. Створення матриці ознак розпізнавання динамічних режимів неспівмірної надструктури кристала $[N(CH_3)_4]_2CuCl_4$ / О. Жилін, С. Свелеба, І. Катеринчук, І. Куньо, І. Карпа, Я. Шмигельський // Електроніка та інформаційні технології (ЕлІТ-2016) : Матеріали VIII укр.-пол. наук.-практ. конф. ; 27–30 серпня 2016 р. Львів-Чинадієво, Україна. – Львів, 2016. – С. 262–265.

Стаття: надійшла до редакції 14.04.2017,
доопрацьована 18.04.2017,
прийнята до друку 22.04.2017.

THE DYNAMICAL STATE OF INCOMMENSURATE SUPER STRUCTURE IN THE $[N(CH_3)_4]_2CuCl_4$ CRYSTALS

I. Karpa, S. Sveleba, I. Katerynychuk, Ya. Shmygelsky, I. Kunyo, A. Zhilin

Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine
incomlviv@gmail.com

The signs of dynamic modes of inhomogeneous structures were investigated, it were described with the Lifshitz invariant in the thermodynamic potential without constant amplitude approximation for the order parameter. Also the impact of the distribution of amplitude function oscillation on the phase of the order parameter in the model, which describes the periodic structure in ferroelectrics and ferroelastics were investigated.

Senior Lyapunov exponent is mostly positive for this type of disparate structures, this is a sign of the existence of a system chaotic regimes. The resulting all obtained maps of dynamic modes is qualitatively similar and characterized by limit cycles of the signature spectrum of the characteristic Lyapunov parameters (+, -, -, -); (+, 0, -, -); (+, +, -, -). The chaotic nature of treatment varies depending on the change of parameters T and K . In processing the data, it was observed that the most common mode is hiperchaos with signature (+ + - -).

Key words: incommensurate structure, senior Lyapunov exponent, chaos.