ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ELECTRICAL ENGINEERING
2010. Вип. 61. С.19-25 2010. Is. 61. P.19-25

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ПРИСТРОЇ

УДК 621.3.01

КІНЕТИЧНА КО-ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО ПОЛЯ

В. Чабан

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

З'ясовано, що в нелінійному анізотропному середовищі кінетичні енергія й ко-енергія електромагнетного поля, яка задовольняє фізичний принцип найменшої дії у варіаційному інтегральному принципі Гамільтона–Остроградського, забезпечують однакові силові характеристики цього принципу.

Ключові слова: анізотропне середовище, енергія й ко-енергія, електромагнетне поле.

Саме тепер на часі питання розробки теоретичних основ інтердисциплінарного математичного моделювання [1, 2]. З огляду на це популярнішає енергетичний підхід, за яким стоїть один з найуніверсальніших законів природи – принцип найменшої дії. В основі цього підходу – варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського, який використовує поняття кінетичної і потенціальної енергії. Ці поняття в електротехніці відносні й залежать від вибору тих чи інших узагальнених координат і швидкостей. Якщо йдеться про теорію електромагнетного поля, то узагальнені координати й швидкості тут природно вибирати за причетністю їх до основного вектора електромагнетизму – вектор-потенціалу **A**.

Основний вектор магнетного поля – вектор індукції **B** – визначений просторовим розподілом вектора **A**, а основний вектор електричного поля – вектор напруженості **E** – його швидкістю [1]:

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{1}$$

відтак похідні вектори

$$\mathbf{D} = \mathrm{E}'(\mathbf{E})\mathbf{E}; \quad \mathbf{H} = \mathrm{N}'(\mathbf{B})\mathbf{B}, \tag{2}$$

де **D**, **H** – вектори електричної індукції й напруженості магнетного поля; $\mathrm{E}'(\mathbf{E}), \mathrm{N}'(\mathbf{B})$ – матриці статичних електричних проникностей і релуктивностей середовища [2].

У теорії кіл усе навпаки – електрична енергія визначена ладунками конденсаторів *q,* а магнетна – струмами котушок індуктивності, як швидкостями зміни ладунків $i = dq/dt$ [3],

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = q; \quad \oint_l \mathbf{H}d\mathbf{l} = i. \tag{3}$$

Похідні величини знаходять так:

$$u = q/C'(q); \quad \Psi = L'(i)i, \tag{4}$$

де u, Ψ – напруга конденсатора й повне потокозчеплення котушки індуктивності; $C'(q)$, $L'(i)$ – статичні ємність конденсатора й індуктивність котушки.

Кінетична енергія електромагнетного поля. Електричну енергію електромагнетного поля, зосереджену в об'ємі V області інтегрування, записують як

$$W_E = \int_V w_E dV; \quad W_M = \int_V w_M dV, \tag{5}$$

де w_E, w_M – густини електричної і магнетної енергій

$$w_E = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E}d\mathbf{D}; \quad w_M = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}d\mathbf{B}. \tag{6}$$

До виразів (5), (6) приходять, зазвичай, з рівнянь електромагнетного поля в нерухомому безвтратному середовищі, записаних у векторах.

Отже,

$$dw_E = \mathbf{E}d\mathbf{D}; \quad dw_M = \mathbf{H}d\mathbf{B}. \tag{7}$$

Вирази (2) засвідчують, що вектори **E** й **B** – основні вектори, а до **D** й **H** приходимо через параметри середовища. Це ще переконливіше підтверджує силова характеристика поля (сила Лоренца), яка відтворює результати експерименту:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{9}$$

де $\mathbf{F}$ – вектор сили; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості.

За результатами останніх досліджень [2, 4] до питання електромагнетної енергії можна підійти дещо прискіпливіше. У [1, 2] з'ясовано, що на підставі енергетичного підходу можна одержати лише рівняння вектора-потенціалу, а вже потім через заміни (1), (2) можна прийти й до рівнянь у векторах. Хоча традиційно все відбувалось навпаки – від рівнянь у векторах прийшли до рівнянь вектора-потенціалу. Енергетичний підхід значно ускладнений у випадку нелінійних середовищ. Його вперше в теорії електромагнетного поля реалізовано в [1], проте автору довелося у виразі (4) відмовитися від поняття електричної енергії на користь електричної кінетичної ко-енергії

$$w_{EC} = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D}d\mathbf{E}, \tag{10}$$

де w_{EC} – густина електричної ко-енергії, подібно до того, як це зроблено в теорії електричних кіл [3], де автори скористались поняттям магнетної кінетичної ко-енергії.

В обох випадках – енергій і ко-енергії – силові характеристики електричного поля шукають за просторовим градієнтом

$$\mathbf{F}_E = -\nabla \int\limits_V \int\limits_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} d\mathbf{D} dV; \quad \mathbf{F}_{EC} = -\nabla \int\limits_V \int\limits_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D} d\mathbf{E}, dV; \quad \mathbf{F}_M = -\nabla \int\limits_V \int\limits_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B} dV. \qquad (11)$$

Виникає слушне запитання [2]: кінетична ко-енергія – розрахункова величина, чи за нею прихований глибокий фізичний зміст? Перша відповідь напрошується сама собою: уже те, що такі універсальні закони фізики, як закон збереження енергії й принцип найменшої дії, які стоять за принципом Гамільтона–Остроградського, не можуть приводити до фізичних законів природи, виходячи з енергетичних перетворень нефізичної величини. А, може навпаки, кінетичну енергію треба піддати сумніву? Як-не-як, дорога до неї веде через рівняння електромагнетного поля, у яких є цікавий момент. А саме: поняття магнетного поля – це лише релятивістський ефект в електричному полі. Тож, з’ясуємо, до якої з двох енергій приводять експериментальні результати (9). Однак постараємося розглянути це дещо детальніше. Хоч ми й не отримаємо вичерпної відповіді, але проллємо світло на проблему.

Надамо кожному з доданків (9) такого вигляду:

$$d\mathbf{F}_E = q d\mathbf{E}; \quad d\mathbf{F}_M = q\left(\mathbf{v} \times d\mathbf{B}\right), \qquad (12)$$

Проінтегруємо (12), одержимо

$$\mathbf{F}_E = \int\limits_0^{\mathbf{E}} q d\mathbf{E}; \quad \mathbf{F}_M = \int\limits_0^{\mathbf{B}} q\left(\mathbf{v} \times d\mathbf{B}\right). \qquad (13)$$

Проаналізуємо кожен з цих виразів окремо.

Якщо взяти до уваги, що потік вектора індукції електричного поля спрямований у середину об’єму інтегрування

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\rho, \qquad (14)$$

де ρ – щільність об’ємного ладунку, то першому виразу (13) можемо надати вигляду

$$\mathbf{F}_E = \int\limits_0^{\mathbf{E}} \int\limits_V \rho dV d\mathbf{E} = -\int\limits_V \int\limits_0^{\mathbf{E}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) d\mathbf{E} dV. \qquad (15)$$

Щоб виконувати подальші перетворення, автору довелось поглибити математичні знання, що стосуються приростів векторних полів. Для цього векторну характеристику поля в ортотропному (в ізотропному як окремий випадок) нелінійному середовищі запишемо як $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{G})$, де $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ – основні вектори поля.

Доведено першу основну теорему [4]

$$\int\limits_0^{\mathbf{F}(\mathbf{G}),} (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\mathbf{G} = \int\limits_0^{\mathbf{F}} (d\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}. \qquad (16)$$

Друга теорема є наслідком (16) і справджується лише у безвихрових полях $(\nabla\times\mathbf{G}=0)$

$$\int\limits_{0}^{\mathbf{F}(\mathbf{G})}(\nabla\cdot\mathbf{F})d\mathbf{G}=\nabla\int\limits_{0}^{\mathbf{F}}\mathbf{G}d\mathbf{F}. \qquad (17)$$

Третя залежність – також наслідок (16), але вона справджується в соленоїдальних полях $(\nabla\cdot\mathbf{G}=0)$

$$\int\limits_{0}^{\mathbf{F}}(\nabla\times\mathbf{G}\times d\mathbf{F}=\nabla\int\limits_{0}^{\mathbf{F}}\mathbf{G}d\mathbf{F}. \qquad (18)$$

Внутрішній інтеграл у (15) запишемо, згідно з (17),

$$\int\limits_{0}^{\mathbf{D}(\mathbf{E})}(\nabla\cdot\mathbf{D})d\mathbf{E}=\int\limits_{0}^{\mathbf{D}}\big(\nabla(\mathbf{E}d\mathbf{D}). \qquad (19)$$

Підставимо (19) у (15), отримаємо все таки не другий, а перший вираз (11). А це означає, що вираз питомої електричної енергії випливає безпосередньо з експериментального закону Кулона, а тому поняття кінетичної енергії поза сумнівом. Тож, до поняття кінетичної ко-енергії треба шукати власну дорогу!

Потенціальна енергія магнетного поля. З виразу (18) цю енергію одержимо набагато простіше. Якщо взяти до уваги, що

$$\rho\mathbf{v}=\delta=\nabla\times\mathbf{H}, \qquad (20)$$

то другому виразу (13) можемо надати вигляду

$$\mathbf{F}_M=\int\limits_{0}^{\mathbf{B}}\int\limits_{V}\rho dV\big(\mathbf{v}\times d\mathbf{B}\big)=\int\limits_{V}\int\limits_{0}^{\mathbf{B}}\big((\nabla\times\mathbf{H})\times d\mathbf{B}\big)dV. \qquad (21)$$

Якщо зважати, що $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, то внутрішній інтеграл у (21), згідно з (18),

$$\int\limits_{0}^{\mathbf{B}}(\big(\nabla\times\mathbf{H})\times d\mathbf{B}\big)=-\int\limits_{0}^{\mathbf{B}}\big(\nabla(\mathbf{H}d\mathbf{B}). \qquad (22)$$

Тепер на підставі (20), (22) отримаємо третій вираз потенціальної магнетної енергії.

Якщо бути строгішим, то до виразів (6) через (9) ми все ж таки приходимо з точністю до градієнта.

Кінетична ко-енергія електричного поля. Доведемо, що перші два вирази (11) – у випадку енергії й ко-енергії – приводять до того самого результату. Для цього розпишемо їхні внутрішні інтеграли у вигляді

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_E=-\mathbf{x}_0\int\limits_{0}^{\mathbf{D}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}dD_x+\frac{\partial E_y}{\partial x}dD_y+\frac{\partial E_z}{\partial x}dD_z\right)-\mathbf{y}_0\int\limits_{0}^{\mathbf{D}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}dD_x+\frac{\partial E_y}{\partial y}dD_y+\frac{\partial E_z}{\partial y}dD_z\right)-\\-\mathbf{z}_0\int\limits_{0}^{\mathbf{D}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}dD_x+\frac{\partial E_y}{\partial z}dD_y+\frac{\partial E_z}{\partial z}dD_z\right);\end{gathered} \qquad (23)$$

$$\mathbf{F}_{EC} = -\mathbf{x}_0 \int_0^{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} dE_x + \frac{\partial D_y}{\partial x} dE_y + \frac{\partial D_z}{\partial x} dE_z \right) - \mathbf{y}_0 \int_0^{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial D_x}{\partial y} dE_x + \frac{\partial D_y}{\partial y} dE_y + \frac{\partial D_z}{\partial y} dE_z \right) - \\ - \mathbf{z}_0 \int_0^{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial D_x}{\partial z} dE_x + \frac{\partial D_y}{\partial z} dE_y + \frac{\partial D_z}{\partial z} dE_z \right). \quad (24)$$

Повні диференціали векторів поля запишемо так:

$$d\lambda_i (\lambda = D, E) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \lambda_i}{\partial z} dz, \; (i = x, y, z). \quad (25)$$

Частинні похідні проекцій вектора електричної індукції виразимо через частинні похідні вектора напруженості електричного поля

$$\frac{\partial D_i}{\partial k} = \varepsilon_{ix} \frac{\partial E_x}{\partial k} + \varepsilon_{it} \frac{\partial E_y}{\partial k} + \varepsilon_{iz} \frac{\partial E_z}{\partial k}, \; (i, k = x, y, z), \quad (26)$$

де $\varepsilon_{ik} \, (i, k = x, y, z)$ – елементи матриці $\mathrm{E}''(\mathbf{E})$ диференціальних електричних проникностей, її знаходимо за матрицею статичних параметрів $\mathrm{E}'(\mathbf{E})$ згідно з формальною математичною залежністю [2]

$$\mathrm{E}'' = \frac{d\mathrm{E}'}{dE} E + \mathrm{E}'. \quad (27)$$

На підставі (16) можемо записати ще потрібні дев'ять співвідношень:

$$\begin{gathered} \frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \; \frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0; \; \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0; \; \frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \; \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0; \; \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0; \; \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \end{gathered} \quad (28)$$

Підставимо (25), (26), (28) у (23) і (24), а одержані результати – в (11), після виконання відповідних математичних перетворень отримаємо беззастережно прогнозований результат, що

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_{CE}, \quad (29)$$

Що й треба було довести.

У випадку теорії електричних кіл або ізотропного суцільного середовища рівність (29) доводять значно простіше, не вдаючись до виразу (16), оскільки в такому разі матриці диференціальних індуктивностей і електричних проникностей симетричні $L'' = L''_t$, $\mathrm{E}'' = \mathrm{E}''_t$. В анізотропному середовищі матриця диференцільних електричних проникностей несиметрична, бо її рядки знаходять за різними характеристиками середовища в головних осях ортотропії [2]. У випадку лінійного середовище кінетична ко-енергія також не втрачає сенсу, троте вона дорівнює тотожно кінетичній енергії, що є безпосереднім наслідком (6). У такому разі ці енергії закривають одна одну, тому й не видно одну з них за іншою.

Отже, кінетична енергія й ко-енергія в нелінійному ізотропному та анізотропному середовищах не дорівнюють одна одній, однак ґрадієнти їхні однакові! Отже, й силові характеристики поля вони забезпечують однакові! А тому з погляду практичних наслідків вони взаємозамінні.

Оскільки кінетична ко-енергія в принципі Гамільтона–Остроградського єдина, що задовольняє енергетичний принцип найменшої дії, то її доцільно вважати також істинною енергетичною характеристикою поля. Однак, щоб говорити про її фізичний зміст, наразі не достатньо наукових аргументів, а тому питання поки що відкрите. Проте ця задача отримає найближчим часом позитивний розв’язок, бо вона є на часі. І надто вона вже нагадує подібну, що була пов’язана з фізичним змістом вектора-потенціалу **A**.

1. *Чабан А.* Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах. Л.: вид-во Тараса Сороки, 2007. 310 с.
2. *Чабан В.* Електромагнетне поле. Л.: вид-во Тараса Сороки, 2006. 396 с.
3. *Уайт Д., Вудсон Г.* Электромеханическое преобразование энергии / Пер. з англ. / М.-Л.: Энергия, 1964. 528 с.
4. *Чабан В.* Три інтегральні залежності векторних полів // Матеріали XII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, К., 2008. 423 с.

THE KINETIC CO-ENERGY OF ELECTROMAGNETIC FIELD

V. Tchaban

Lviv polytechnic National University,
Bandera Str., 12 , Lviv 79013, Ukraine
vtchaban@polynet. Lviv.ua

In the paper is shown that in non-linear anisotropy medium the kinetic energy and co-energy of electromagnetic field, which satisfies to physical principle of least action in variation integral Hamilton-Ostrogradsky’s principle, secures equal force characteristics of the last.

Key words: anisotropy medium, energy and co-energy, electromagnetic field.

КИНЕТИЧЕСКАЯ КО-ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Чабан

Национальный университет “Львовская политехника”,
ул. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Установлено, что в нелинейной анизотропной среде кинетические энергия и ко-энергия электромагнитного поля, удовлетворяющие физический принцип наименьшего действия в вариационном интегральном принципе Гамильтона–Остроградского, обеспечивают одинаковые силовые характеристики этого принципа.

Ключевые слова: анизотропная среда, энергия и ко-энергия, электромагнитное поле.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.2010
Прийнята до друку 16.06.2010