

УДК 621.501

АВТОКОЛИВАННЯ У ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРАХ, ЩО ЗУМОВЛЕНІ КВАНТУВАННЯМ ЗА РІВНЕМ

Л. Синицький, Я. Шмигельський

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна
shmygelsky@electronics.wupr.lviv.ua

Для визначення областей існування автоколивань у цифрових фільтрах, що виникають за рахунок квантування за рівнем, застосовано метод гармонічного балансу. На прикладі цифрових фільтрів другого порядку показано, що цей метод може успішно застосовуватися для виявлення довгоперіодних автоколивань. Отримано оцінку для максимальної амплітуди симетричних автоколивань у випадку, коли ефект квантування за рівнем зумовлений операцією Round (заокруглення до найближчого цілого).

Ключові слова: цифрові фільтри, квантування за рівнем, автоколивання.

Цифрові фільтри, як правило, використовуються при значеннях параметрів, що близькі до границі стійкості. Тому окремі блоки фільтра, які найчастіше є ланками другого порядку, мають високу вибірковість. Це спонукає дослідити можливість застосування методу гармонічного балансу для визначення областей існування автоколивань, що зумовлені квантуванням за рівнем.

Для визначення областей нестійкості цифрових фільтрів найчастіше використовували другий метод Ляпунова, алгебраїчні критерії та чисельні експерименти [1,2]. Однак, у більшості випадків області нестійкості визначаються дуже наближено. Можна сподіватися, що для довгоперіодних коливань результати, отримані методом гармонічного балансу, дадуть цілком вірогідні дані найпростішим шляхом.

Для визначеності, розглянемо цифровий фільтр другого порядку, рівняння якого із врахуванням ефекту квантування за рівнем має вигляд:

$$x_{m+1} + Q(px_m) + Q(qx_{m-1}) = 0, \quad (1)$$

де $p, q \in R$ - коефіцієнти фільтра, $Q(y_m)$ - функція, що визначається дискретизацією за рівнем.

Функцію $Q(y_m)$ можна представити у вигляді:

$$Q(y_m) = y_m + z_m, \quad (2)$$

де $z_m = Z(y_m)$ - змінна, що враховує ефект квантування.

Приймемо гармонічний закон зміни x_m :

$$x_m = A \cdot \sin(\nu m + \alpha), \quad (3)$$

де $\nu = 2\pi/N$ - безрозмірна частота, N - період коливань по дискретній змінній m . Тоді перша гармоніка функції $Z(y_m)$ буде:

$$Z_1 = C \cdot \cos(\nu m + \alpha) + S \cdot \sin(\nu m + \alpha), \quad (4)$$

причому C і S є функціями від A і α . Отже, на відміну від неперервних автономних систем, амплітуда A в (3) залежить не тільки від параметрів p і q але й від початкової фази α . Діапазон зміни кута α можна обмежити відрізком $[0, \nu]$, бо заміна α на $\nu + \alpha$ еквівалентна заміні m на $m+1$ і значення першої гармоніки $Z(y_m)$ зберігається.

Використовуючи (2) перепишемо (1) у вигляді:

$$x_{m+1} + px_m + qx_{m-1} + Z(px_m) + Z(qx_{m-1}) = 0. \quad (5)$$

Відмітимо, що коли лінійна частина (5) є ФНЧ, то в передбачуваному розв'язку слід враховувати постійну складову.

Підставивши (3) у (5) і обмежившись у розкладі функції $Z(y_m)$ тільки першою гармонікою, прирівняємо до нуля коефіцієнти при $\cos(\nu m + \alpha)$ і $\sin(\nu m + \alpha)$. Тоді одержимо систему із двох рівнянь відносно трьох невідомих A , α і ν :

$$A \cos \nu + pA + S(pA, \alpha) + qA \cos \nu + C(qA, \alpha) \sin \nu + S(qA, \alpha) \cos \nu = 0, \quad (6a)$$

$$A \sin \nu + C(pA, \alpha) - qA \sin \nu + C(qA, \alpha) \cos \nu - S(qA, \alpha) \sin \nu = 0. \quad (6b)$$

Розглянемо частковий випадок, коли $\alpha = 0$. Якщо функція $Q(y_m)$ є непарною, то $C(A, \alpha) = 0$ при $\alpha = 0$ і друге рівняння (6) набуває вигляду:

$$(1 - q)A = S(qA, \alpha). \quad (7)$$

Це рівняння дозволяє визначити амплітуду автоколивань, симетричних відносно максимуму.

Перше рівняння (6) приводить до виразу для визначення частоти ν :

$$\cos \nu = -\frac{p + S(pA, 0)/A}{1 + q + S(qA, 0)/A}. \quad (8)$$

Якщо прийняти до уваги, що $|S| \ll A$, то:

$$\cos \nu \cong -\frac{p}{1 + q}, \quad (9)$$

що при $q \cong 1$ дає практично те саме значення частоти, як і у випадку лінійної частини системи (5).

Співвідношення (7) свідчить про те, що є декілька значень амплітуди автоколивань A . Чисельний експеримент показує, що є набагато більше автоколивних режимів ніж це впливає з рівняння (6). Можна навести

елементарний приклад, що підтверджує цей факт. Якщо $p = -1$, $q \cong 1$, то існують цикли з періодом 6 виду $(A, A, 0, -A, -A, 0)$ для усіх цілих A за умови $(1-q)A < 1/2$. Цим циклам відповідає чисто гармонічний закон зміни x_m :

$$x_m = \frac{2}{\sqrt{3}} A \sin \frac{\pi m}{3}.$$

Може викликати подив, що метод гармонічного балансу не виявляє автоколивань для усіх значень A . Причина, очевидно, криється у тому, що значення (2) не є цілими числами, тоді як розв'язок (1) це передбачає. З цієї точки зору метод гармонічного балансу цінний тим, що вказує, коли періодичний розв'язок відсутній. Зрозуміло, що мова йде лише про розв'язок, достатньо близький до гармонічного.

Оцінимо максимальні та мінімальні значення функцій $C(A, \alpha)$ і $S(A, \alpha)$ у випадку, коли $Q(y_m) = \text{Round}(y_m)$ (заокруглення до найближчого цілого). При цьому функція $Z(y_m)$ - періодична з періодом 1 (рис.1).

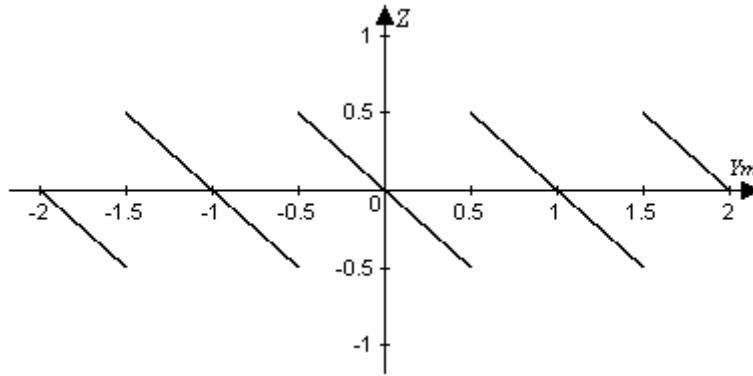


Рис.1. Графік функції $Z(y_m)$.

Тоді для визначення $C(A, \alpha)$ і $S(A, \alpha)$ маємо співвідношення:

$$C(A, \alpha) = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} Z(A \sin(\nu m + \alpha) \cos(\nu m + \alpha)), \quad (10a)$$

$$S(A, \alpha) = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} Z(A \sin(\nu m + \alpha) \sin(\nu m + \alpha)). \quad (10б)$$

Так як $|Z| < 0.5$, то при $\alpha = 0$ найбільше значення S буде:

$$|S|_{\max} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left| \sin \frac{2\pi m}{N} \right|. \quad (11)$$

Приймаючи, без зменшення загальності, N парним, можемо записати

$$|S|_{\max} = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N/2-1} \left| \sin \frac{2\pi m}{N} \right|.$$

Виконуючи операцію сумування, одержимо:

$$|S|_{\max} = \frac{4}{N \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{N}}.$$

Тоді для великих N маємо $\operatorname{tg} \frac{\pi}{N} \cong \frac{\pi}{N}$ і $|S|_{\max} = 1.27$ а отже, у відповідності з (7), максимальне значення амплітуди A для симетричних автоколивань буде:

$$A_{\max} \cong \frac{1.27}{1-q}, \quad (12)$$

що оптимістичніше ніж оцінка, одержана у [1].

Коли $Q(y_m) = \operatorname{Trunk}(y_m)$ (заокруглення шляхом відкидання дробової частини), то неважко показати, що при $\alpha = 0$ будемо мати $C = 0$, $S < 0$, тобто рівняння (7) не має розв'язків. Отриманий результат може бути обґрунтований відомим експериментальним фактом, що при заокругленні шляхом відкидання дробової частини не спостерігаються автоколивання, близькі до гармонічних.

Найбільш простий вид несиметричних автоколивань у цифрових фільтрах – це коливання з постійною складовою у послідовності x_m :

$$x_m = A_0 + A \cdot \sin(vm + \alpha) \quad (13)$$

Рівняння для визначення амплітуди першої гармоніки при наявності постійної складової не можна, взагалі кажучи, прийняти у формі (6), так як коефіцієнти C і S залежать від A_0 . Тільки при $A_0 \ll A$ це допустимо. Остання умова звичайно виконується при значеннях q достатньо близьких до 1.

Несиметричні коливання у відсутності постійної складової, які характеризуються тим, що додатна півхвиля не збігається за формою з від'ємною півхвилею, не можна пояснити відмінністю кута α від нуля. В цьому випадку слід враховувати вищі гармоніки. Такі коливання можуть спостерігатися лише при невисокій вибірковості лінійної частини системи (5). За цих умов виникають також низькочастотні коливання, період яких значно більший ніж значення, що визначається резонансною частотою лінійної частини системи (5). Однак, як свідчать чисельні експерименти, у спектрі коливань цього типу переважає гармоніка, частота якої збігається або близька до резонансної частоти лінійної частини системи. Тому такі коливання можуть бути виявлені методом гармонічного балансу.

Таким чином відомості про можливість існування автоколивань та їх параметри, що отримані методом гармонічного балансу, цілком вірогідні. Метод гармонічного балансу повністю втрачає свої можливості лише у випадку короткоперіодних коливань, коли передумови для його застосування виявляються невиконаними. Розгляд властивостей методу гармонічного балансу для цифрових

систем другого порядку дає підстави вважати, що він успішно може застосовуватись до систем більш високого порядку та багатовимірних фільтрів.

1. *Parker S.R., Hess S.F.* Limit-cycle oscillation in digital filter // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. V. CT-18. N6. P. 687-697.
2. *Green B.D., Turner L.T.* New limit-cycle bounds for digital filters // Trans. Circuit and Systems Theory. 1988. V. CAS-35. N4. P. 365-374.

SELF-OSCILLATIONS IN DIGITAL FILTERS, CAUSED BY QUANTIZATION ON LEVEL

L. Sinitsky, Y. Shmygelsky

*Ivan Franko National University of L'viv,
Tarnavsky Str. 107, UA-79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua*

The harmonic balance method is employed for the determination of self-oscillation region in digital filters due to quantization effect. Using the second-order filters as an example it is shown that this method can be successfully applied in order to reveal large period self-oscillations. Maximum magnitude of the symmetric self-oscillations has been estimated for the case in which quantization effect is caused by truncation procedure.

Key words: digital filters, quantization on level, self-oscillations.

АВТОКОЛЕБАНИЯ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ КВАНТОВАНИЕМ ПО УРОВНЮ

Л. Синицький, Я. Шмигельський

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львов, Украина
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua*

Для определения областей существования автоколебаний в цифровых фильтрах, возникающих за счет квантования по уровню, использовано метод гармонического баланса. На примере цифровых фильтров второго порядка показано, что этот метод может успешно применяться для выявления долгопериодных автоколебаний. Получено оценку для максимальной амплитуды симметрических автоколебаний в случае, когда эффект квантования по уровню обусловлен операцией Round (округление к ближайшему целому).

Ключевые слова: цифровые фильтры, квантование по уровню, автоколебания.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.2010

Прийнята до друку 15.06.2010