ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ПРИСТРОЇ

УДК 621.313.21

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ЧАСТИНА 2

М. Говикович

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. Бандери, № 12, 79013 Львів, Україна
howykowycz@ieee.org

На підставі отриманого в Частині 1 виразу енергетичного функціонала для формулювання варіаційної задачі аналізу електромагнітного поля та методики інваріантних наближень сформовано дискретний аналог цього функціонала. Отриманий аналог має тензорний характер, що є наслідком застосування для його формування многочленів Тейлора. Він є функцією значень векторного потенціалу магнітного поля та скалярного електричного потенціалу у вузлах сітки. Отримано систему рівнянь для мінімізації цього функціонала.

Ключові слова: варіаційна задача, енергетичний функціонал, інваріантні наближення, електромагнітне поле.

У наступних викладах продовжуємо наскрізну нумерацію формул, розпочату в Частині 1 нашої статті [2].

Загалом крайова задача математичної фізики формулюється в операторній формі так [1]:

$$Au = f; \qquad u \in D_A; \qquad f \in H, \tag{43}$$

де A – лінійний оператор з областю визначення D_A, щільною в гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (,) та нормою $\| \ \|$; f – задана функція, визначена на відкритій обмеженій множині Ω точок $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ евклідового простору $\Re^n$ з неперервною за Лівшицем границею Γ; u – шукана функція, визначена на замиканні $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, причому її значення на границі вважається заданим. Якщо оператор A є симетричним додатним оператором, то задачу (43) можна замінити такою варіаційною задачею: знайти елемент $u_0 \in D_A$, що надає мінімального значення функціоналу

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \, . \tag{44}$$

Якщо розв'язок шукається в енергетичному просторі H_A, утвореному доповненням множини D_A її граничними елементами (тобто $H_A = D_A \cup \Gamma_A$), то такий розв'язок називається узагальненим.

Запишемо отриманий в Частині 1 [2] цієї статті вираз енергетичного функціонала для задачі аналізу електромагнітного поля

$$F = \int_V dV \int_{\boldsymbol{B}_0}^{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{B} - \int_V dV \int_{\boldsymbol{A}_0}^{\boldsymbol{A}} (\partial \boldsymbol{D} / \partial t + \boldsymbol{J}) d\boldsymbol{A} + \int_V dV \int_{grad\varphi_0}^{grad\varphi} (\boldsymbol{D} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{J} dt) \cdot d(grad\varphi) + \int_V \varphi\rho_0 dV + const, \quad (45)$$

де $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{D}_0$, ρ_0 - значення вектора магнітної індукції, значення вектора електричного зміщення та значення об'ємної густини електричного заряду, відповідно, для довільної точки з координатами x, y, z розглянутого середовища у момент часу $t = t_0$, V– об'єм області Ω розрахунку поля.

Введемо такі позначення для підінтегральних виразів складових функціонала

$$w = \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B}; \quad (46)$$

$$g = \int_{\mathbf{A}_0}^{\mathbf{A}} (\partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{J}) d\mathbf{A}; \quad (47)$$

$$e = \int_{grad\varphi_0}^{grad\varphi} (\boldsymbol{D} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{J} dt) \cdot d(grad\varphi); \quad (48)$$

$$v = \varphi\rho_0. \quad (49)$$

Тоді функціонал (45) набуває вигляду

$$F = \int_V (w - g + e + v) dV + const. \quad (50)$$

Нагадаємо, що функції, які забезпечують його мінімальне значення, є шуканими розв'язками системи рівнянь Максвела. Для знаходження таких функцій прирівняємо до нуля похідні функціонала за невідомими, якими є компоненти векторного потенціалу магнітного поля A_x, A_y, A_z та скалярний електричний потенціал φ (оскільки решта координат режиму визначаються ними). Запишемо вирази цих похідних для підінтегральних функцій енергетичного функціонала:

$$\partial w / \partial A_x = \boldsymbol{H}\, \partial \boldsymbol{B} / \partial \boldsymbol{A_x}; \quad \partial w / \partial A_y = \boldsymbol{H}\, \partial \boldsymbol{B} / \partial \boldsymbol{A}_y; \quad \partial w / \partial A_x = \boldsymbol{H}\, \partial \boldsymbol{B} / \partial \boldsymbol{A}_z; \quad \partial w / \partial \varphi = 0;$$

$$\partial g / \partial A_x = \boldsymbol{i}(\partial \mathbf{D} / \partial \mathbf{t} + \boldsymbol{J}) = \partial D_x / \partial t + J_x; \quad \partial g / \partial A_y = \boldsymbol{j}(\partial \mathbf{D} / \partial \mathbf{t} + \boldsymbol{J}) = \partial D_y / \partial t + J_y;$$

$$\partial g / \partial A_z = \boldsymbol{k}(\partial \mathbf{D} / \partial \mathbf{t} + \boldsymbol{J}) = \partial D_z / \partial t + J_z; \quad \partial g / \partial \varphi = 0;$$

$$\partial e / \partial A_x = \partial e / \partial A_x = \partial e / \partial A_x = 0; \quad \partial e / \partial \varphi = (\boldsymbol{D} + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{J} dt) \partial(grad\varphi) / \partial \varphi;$$

$$\partial v / \partial A_x = \partial v / \partial A_x = \partial v / \partial A_x = 0; \quad \partial v / \partial \varphi = \mathrm{c}_0. \quad (51)$$

Мінімізацію функціонала (50) виконаємо з використанням методики інваріантних наближень [3]. Ця методика пропонує обрати за один з критеріїв адекватності числового методу його інваріантність. Оскільки числові методи розрахунку ґрунтуються на використанні степеневих поліномів, то методика інваріантних наближень пропонує використовувати лише ті поліноми, які є інваріантними (тобто не змінюють свого вигляду) у разі лінійних перетворень системи координат. З міркувань зручності було вибрано многочлени Тейлора. Тривимірний многочлен Тейлора *n*-го степеня містить $P=(n+3)!/(n!3!)$ елементів, тому для апроксимації функції всередині скінченного елемента (СЕ) комплект його вузлів має складатися з *P* вузлів, які не можуть належати одній поверхні *n*-го порядку (такий комплект вузлів було названо невиродженим). Заповнимо область Ω розрахунку поля сукупністю *M* скінченних елементів *n*-го порядку. Кожному СЕ присвоїмо порядковий номер, біжуче значення якого позначатимемо буквою *m* (*m=1, ..., M*). Кожному вузлові *m*-го СЕ присвоїмо подвійний індекс, перша частина якого вказує на номер СЕ, а друга – на порядковий номер *p* (*p=1, ..., P*) вузла в цьому елементі. Таку подвійну нумерацію вузлів називатимемо локальною. Вузли граней сусідніх СЕ суміщаються, тому число *K* реальних вузлів області Ω є набагато меншим від добутку $M \times P$. Кожному реальному вузлові присвоїмо також одноіндексний порядковий номер, біжуче значення якого позначатимемо літерою *k* (*k=1, ..., K*). Таку нумерацію вузлів називатимемо базовою. Для локальної нумерації користуватимемось нижніми індексами, а для базової – верхніми.

Використавши формулу числового інтегрування за об’ємом, запишемо вираз вкладу *m*-го скінченного елемента у функціонал (50)

$$F_m=\sum_{p=1}^{P} q_{mp}\,(w_{mp}-g_{mp}+e_{mp}+v_{mp})\,, \tag{52}$$

де q_{mp} – коефіцієнти формули інтегрування, який залежать лише від вигляду цього скінченного елемента.

Отримаємо дискретні вирази функцій w, g, e, v для p-го вузла *m*-го СЕ.

Значення компонентів векторного потенціалу магнітного поля та скалярного електричного потенціалу у будь-якій точці *m*-го СЕ визначаються згідно з формулами [4]:

$$A_x[x,y,z]=\vec{T}\boldsymbol{T}_m^{-1}\vec{A}_{xm*}\,;\quad A_y[x,y,z]=\vec{T}\boldsymbol{T}_m^{-1}\vec{A}_{ym*}\,;\quad A_z[x,y,z]=\vec{T}\boldsymbol{T}_m^{-1}\vec{A}_{zm*}\,;$$

$$\varphi[x,y,z]=\vec{T}\boldsymbol{T}_m^{-1}\vec{\varphi}_{m*}\,, \tag{53}$$

де $\vec{A}_{xm}$, $\vec{A}_{ym}$, $\vec{A}_{zm}$, $\vec{\varphi}_m$ – вектори-рядки вузлових значень потенціалів для *m*-го СЕ; $*$ – знак транспонування, який перетворює ці рядки у відповідні стовпці; $\boldsymbol{T}_m^{-1}$ – обернена матриця Тейлора *m*-го СЕ; $\vec{T}$ – значення вектора Тейлора у точці визначення потенціалу. Як бачимо, для того, щоб розрізнити тривимірні вектори та вектори P-вимірного простору многочленів Тейлора, ставимо над останніми стрілочку.

Увівши позначення $\vec{T}\boldsymbol{T}_m^{-1}=\vec{K}$, перепишемо формули (53) у вигляді

$$A_x=\vec{K}\vec{A}_{xm*}=\vec{A}_{xm}\vec{K}_*\,;\quad A_y=\vec{K}\vec{A}_{ym*}=\vec{A}_{ym}\vec{K}_*\,;$$

$$A_z=\vec{K}\vec{A}_{zm*}=\vec{A}_{zm}\vec{K}_*\,;\quad \varphi=\vec{K}\vec{\varphi}_{m*}=\vec{\varphi}_m\vec{K}_*\,. \tag{54}$$

Якщо точка, в якій визначається значення потенціалу, збігається з p-м вузлом *m*-го СЕ, то вектор $\vec{K}$ має тільки один ненульовий елемент, який дорівнює одиниці; номер цього елемента дорівнює номеру p вузла у локальній нумерації вузлів комплекту *m*-го СЕ. Значення будь-якої іншої величини (вектора електричного зміщення, вектора густини електричного струму, вектора напруженості магнітного поля, електричного заряду тощо) у будь-якій точці *m*-го СЕ визначаються на підставі вузлових значень цієї величини за формулами, аналогічними формулам (54). Наприклад, для вектора напруженості магнітного поля одержуємо $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}\vec{K}\vec{H}_{xm*} + \boldsymbol{j}\vec{K}\vec{H}_{ym*} + \boldsymbol{k}\vec{K}\vec{H}_{xm*}$.

Застосувавши матриці диференціювання [4], запишемо вирази для проекцій вектора магнітної індукції та градієнта скалярного електричного потенціалу у будь-якій точці m-го СЕ:

$$B_x = -\partial A_y/\partial z + \partial A_z/\partial y = -\vec{T}\boldsymbol{N_z}\boldsymbol{T^{-1}}\vec{A}_{ym*} + \vec{T}\boldsymbol{N_y}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{A}_{zm*};$$

$$B_y = -\partial A_z/\partial x + \partial A_x/\partial z = -\vec{T}\boldsymbol{N}_x\boldsymbol{T^{-1}}\vec{A}_{zm*} + \vec{T}\boldsymbol{N}_z\boldsymbol{T}^{-1}\vec{A}_{xm*};;$$

$$B_z = -\partial A_x/\partial y + \partial A_y/\partial x = -\vec{T}\boldsymbol{N}_y\boldsymbol{T^{-1}}\vec{A}_{xm*} + \vec{T}\boldsymbol{N}_x\boldsymbol{T}^{-1}\vec{A}_{ym*};$$

$$grad\varphi = \partial\varphi/\partial x + \partial\varphi/\partial y + \partial\varphi/\partial z = \vec{T}\overline{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{T^{-1}}\vec{\varphi}_{m*}. \qquad (55)$$

де $\overline{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{N_x} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{N_y} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{N_z}$ – матриця Гамільтона; $\boldsymbol{N_x}, \boldsymbol{N_y}, \boldsymbol{N_z}$ – матриці часткового диференціювання вектора Тейлора за змінними x, y, z.

Уведемо такі позначення для різницевих аналогів диференційних операторів

$$\vec{T}\boldsymbol{N}_x\boldsymbol{T^{-1}} = \vec{R}_x; \quad \vec{T}\boldsymbol{N}_y\boldsymbol{T^{-1}} = \vec{R}_y; \quad \vec{T}\boldsymbol{N}_z\boldsymbol{T^{-1}} = \vec{R}_z; \quad \vec{T}\overline{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{T^{-1}} = \vec{\boldsymbol{R}}, \qquad (56)$$

де $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$, $\vec{R}_z$ – різницеві аналоги операторів $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, відповідно; $\vec{\boldsymbol{R}}$ – оператор Гамільтона [3]. Для позначення оператора Гамільтона ми використали літеру грубшого шрифту, оскільки цей оператор є матрицею, та знак надкреслення, оскільки його елементи є комбінаціями ортів $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ тривимірного простору.

Тоді з урахуванням (56) формули (55) набудуть такого вигляду:

$$B_x = -\vec{R}_z\vec{A}_{ym*} + \vec{R}_y\vec{A}_{zm*} = -\vec{A}_{ym}\vec{R}_{z*} + \vec{A}_{zm}\vec{R}_{y*}; B_y = -\vec{R}_x\vec{A}_{zm*} + \vec{R}_z\vec{A}_{xm*} = -\vec{A}_{zm}\vec{R}_{x*} + \vec{A}_{xm}\vec{R}_{z*},$$

$$B_z = -\vec{R}_y\vec{A}_{xm*} + \vec{R}_x\vec{A}_{ym*} = -A_{xm}\vec{R}_{y*} + \vec{A}_{ym}\vec{R}_{x*}; \quad grad\varphi = \vec{\boldsymbol{R}}\vec{\varphi}_{\boldsymbol{m}*} = \vec{\boldsymbol{R}}_*\vec{\varphi}_m. \qquad (57)$$

Нагадаємо, що значення за формулами (57) відшукують в точках, що знаходяться всередині або на грані m-го СЕ.

Для запису похідної за часом, яка є частиною формули (47), застосуємо метод формул диференціювання назад (ФДН):

$$\partial\boldsymbol{D}/\partial t = a_0\boldsymbol{D} + \boldsymbol{C_D}, \qquad (58)$$

де a_0 – коефіцієнт формули диференціювання назад, що залежить від порядку ФДН та кроку часового інтегрування; $\boldsymbol{C_D} = \boldsymbol{i}C_{Dx} + \boldsymbol{j}C_{Dy} + \boldsymbol{k}C_{Dz}$ – член, що залежить від значень $\boldsymbol{D}$ на попередніх кроках часового інтегрування, а також від порядку ФДН та кроку часового інтегрування. Для запису часового інтеграла, який належить формулі (48), застосуємо квадратурну формулу інтегрування:

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{J}dt = b_0\boldsymbol{J} + \boldsymbol{C}_J, \qquad (59)$$

де b_0 – коефіцієнт квадратурної формули, що залежить від її порядку та кроку часового інтегрування; $\boldsymbol{C}_J = \boldsymbol{i}C_{Jx} + \boldsymbol{j}C_{Jy} + \boldsymbol{k}C_{Jz}$ – член, що залежить від значень $\boldsymbol{J}$ на попередніх кроках часового інтегрування, а також від порядку квадратурної формули та кроку часового інтегрування.

Для того, щоб знайти мінімум енергетичного функціонала, треба прирівняти до нуля його похідні та розв'язати отриману таким способом систему рівнянь. З урахуванням формул (51) така система рівнянь набуде вигляду:

$$\int_V ((\boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z)\partial(\boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z)/\partial \mathbf{A_x} - \partial D_x/\partial t - J_x)dV = 0\,;$$

$$\int_V ((\boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z)\partial(\boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z)/\partial \mathbf{A}_y - \partial D_y/\partial t - J_y)dV = 0\,;$$

$$\int_V ((\boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z)\partial(\boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z)/\partial \mathbf{A}_z - \partial D_z/\partial t - J_z)dV = 0\,; \tag{60}$$

$$\int_V ((\boldsymbol{i}D_x + \boldsymbol{j}D_y + \boldsymbol{k}D_z + \int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{i}J_x + \boldsymbol{j}J_y + \boldsymbol{k}J_z)dt)\partial(\boldsymbol{i}\,\partial\varphi/\partial x + \boldsymbol{j}\,\partial\varphi/\partial y + \boldsymbol{k}\,\partial\varphi/\partial z)/\partial\varphi + \rho_0)dV = 0\,.$$

Дискретизуючи систему рівнянь (60), ми повинні замінити систему чотирьох рівнянь (отриману диференціюванням по чотирьох змінних – A_x, A_y, A_z та φ) системою $4\times K$ рівнянь. Нагадаємо, що K – це кількість вузлів розрахункової області. Шуканими є значення потенціалів у цих вузлах.

Запишемо вирази похідних вкладу *m*-го СЕ по векторах-рядках вузлових значень потенціалів для *m*-го СЕ з урахуванням формул (54), (57), (58), (59):

$$\vec{\Phi}_{mxm*} = \partial F_m / \partial \vec{A}_{xm} =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} \frac{\partial}{\partial \vec{A}_{xm}} \Big(\int_{\boldsymbol{B_{mp0}}}^{\boldsymbol{B_{mp}}} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{B} - \int_{\boldsymbol{A_{mp0}}}^{\boldsymbol{A_{mp}}} (\partial \mathbf{D}/\partial \mathbf{t} + \boldsymbol{J})d\boldsymbol{A} + \int_{grad\varphi_0}^{grad\varphi} (\boldsymbol{D} + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{J}dt)d(grad\varphi) + \rho_{0mp}\varphi_{mp} \Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp}\Big(H_{xmp}\,\partial B_{xmp}/\partial \vec{A}_{xm} + H_{ymp}\,\partial B_{ymp}/\partial \vec{A}_{xm} + H_{zmp}\,\partial B_{zmp}/\partial \vec{A}_{xm} - (a_0 D_{xmp} + C_{Dx} + J_{xmp})$$

$$\partial A_{xmp}/\partial \vec{A}_{xm} - (a_0 D_{ymp} + C_{Dy} + J_{ymp})\partial A_{ymp}/\partial \vec{A}_{xm} - (a_0 D_{zmp} + C_{Dz} + J_{zmp})\partial A_{zmp}/\partial \vec{A}_{xm} \Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp}\Big(H_{ymp}\vec{R}_{z*} - H_{zmp}\vec{R}_{y*} - (a_0 D_{xmp} + C_{Dx} + J_{xmp})\overline{K}_* \Big)\,; \tag{61}$$

$$\vec{\Phi}_{mym*} = \partial F_m / \partial \vec{A}_{ym} =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} \frac{\partial}{\partial \vec{A}_{ym}} \Big(\int_{\boldsymbol{B_{mp0}}}^{\boldsymbol{B_{mp}}} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{B} - \int_{\boldsymbol{A_{mp0}}}^{\boldsymbol{A_{mp}}} (\partial \mathbf{D}/\partial \mathbf{t} + \boldsymbol{J})d\boldsymbol{A} + \int_{grad\varphi_0}^{grad\varphi} (\boldsymbol{D} + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{J}dt)d(grad\varphi) + \rho_{0mp}\varphi_{mp} \Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp}\Big(H_{xmp}\,\partial B_{xmp}/\partial \vec{A}_{ym} + H_{ymp}\,\partial B_{ymp}/\partial \vec{A}_{ym} + H_{zmp}\,\partial B_{zmp}/\partial \vec{A}_{ym} - (a_0 D_{ymp} + C_{Dy} + J_{ymp})$$

$$\partial A_{xmp}/\partial \vec{A}_{ym} - (a_0 D_{ymp} + C_{Dy} + J_{ymp})\partial A_{ymp}/\partial \vec{A}_{ym} - (a_0 D_{zmp} + C_{Dz} + J_{zmp})\partial A_{zmp}/\partial \vec{A}_{ym} \Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp}\Big(H_{zmp}\vec{R}_{x*} - H_{xmp}\vec{R}_{z*} - (a_0 D_{ymp} + C_{Dy} + J_{ymp})\overline{K}_* \Big)\,; \tag{62}$$

$$\vec{\Phi}_{mzm*} = \partial F_m \big/ \partial \vec{A}_{zm} =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} \, \partial \Big/ \partial \vec{A}_{zm} \Big(\int_{\boldsymbol{B}_{mp0}}^{\boldsymbol{B}_{mp}} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{B} - \int_{\boldsymbol{A}_{mp0}}^{\boldsymbol{A}_{mp}} (\partial \boldsymbol{D} / \partial \boldsymbol{t} + \boldsymbol{J}) d\boldsymbol{A} + \int_{grad\varphi_0}^{grad\varphi} (\boldsymbol{D} + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{J} dt) d(grad\varphi) + \rho_{0mp}\varphi_{mp} \Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} (H_{xmp} \, \partial B_{xmp} \big/ \partial \vec{A}_{zm} + H_{ymp} \, \partial B_{ymp} \big/ \partial \vec{A}_{zm} + H_{zmp} \, \partial B_{zmp} \big/ \partial \vec{A}_{zm} - (a_0 D_{xmp} + C_{Dx} + J_{xmp})$$

$$\partial A_{xmp} \big/ \partial \vec{A}_{zm} - (a_0 D_{ymp} + C_{Dy} + J_{ymp}) \partial A_{ymp} \big/ \partial \vec{A}_{zm} - (a_0 D_{zmp} + C_{Dz} + J_{zmp}) \partial A_{zmp} \big/ \partial \vec{A}_{zm} =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} (H_{xmp} \vec{R}_{y*} - H_{ymp} \vec{R}_{x*} - (a_0 D_{zmp} + C_{Dz} + J_{zmp}) \overline{K}_*) ; \tag{63}$$

$$\vec{\Phi}_{mm*} = \partial F_m \big/ \partial \vec{\varphi}_m =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} \, \partial \Big/ \partial \vec{\varphi}_m \Big(\int_{\boldsymbol{B}_{mp0}}^{\boldsymbol{B}_{mp}} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{B} - \int_{\boldsymbol{A}_{mp0}}^{\boldsymbol{A}_{mp}} (\partial \boldsymbol{D} / \partial \boldsymbol{t} + \boldsymbol{J}) d\boldsymbol{A} + \int_{grad\varphi_0}^{grad\varphi} (\boldsymbol{D} + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{J} dt) d(grad\varphi) + \rho_{0mp}\varphi_{mp} \Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} ((D_{xmp} + b_0 J_{xmp} + C_{jx}) \partial (grad\varphi)_{xmp} \big/ \partial \vec{\varphi}_m + (D_{ymp} + b_0 J_{ymp} + C_{jy}) \partial (grad\varphi)_{ymp} \big/ \partial \vec{\varphi}_m +$$

$$+ (D_{zmp} + b_0 J_{zmp} + C_{jz}) \partial (grad\varphi)_{zmp} \big/ \partial \vec{\varphi}_m + \rho_{0mp} \, \partial \varphi_{mp} \big/ \partial \vec{\varphi}_m) =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} q_{mp} ((D_{xmp} + b_0 J_{xmp} + C_{jx}) \vec{R}_{x*} + (D_{ymp} + b_0 J_{ymp} + C_{jy}) \vec{R}_{y*} + (D_{ymp} + b_0 J_{ymp} + C_{jy}) \vec{R}_{y*} +$$

$$+ \rho_{0mp} \vec{K}_*) , \tag{64}$$

де знак $*$ свідчить про те, що отримано стовпці похідних.

Для відшукання мінімуму енергетичного функціонала ми повинні прирівняти до нуля похідні в кожному вузлі сітки, що покриває розрахункову область. Вираз похідної у внутрішньому вузлі m-го СЕ містить тільки вклад цього СЕ. Однак для отримання виразу такої похідної у суміжних вузлах ми повинні додати вклади від кожного СЕ, що містить цей вузол.

Алгоритм розв’язання отриманої системи нелінійних рівнянь планується викласти у частині 3 статті.

1. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
2. *Говикович М. В., Фільц Р.В.* Теоретичні засади варіаційної задачі аналізу електромагнітного поля. Частина 1 // Теор. електротехніка. 2008. Вип. 59. С. 87–96.
3. *Фільц Р. В.* Дискретний аналог оператора Гамільтона // Математичні методи та фізико-механічні поля. 1988. Вип. 24. С. 20–25.
4. *Kotsyuba-Howykowycz M.* Application of methodology of invariant approximations to magnetic circuit analysis // International Symposium on Signals, Circuits, and Systems. Proceedings. 2005. Vol. 2. P. 585–588.

THEORETICAL PRINCIPLES OF THE VARIATION PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD ANALYSIS PART 2

M. Howykowycz, R. Filc

Lviv Polytechnic National University
Bandera Str., 12, UA–79013 Lviv, Ukraine
howykowycz@ieee.org

On the basis of the expression of energetic functional for formulation of a variational problem of electromagnetic field analysis, obtained in the Part 1 of the article, and on the basis of invariant approximations technique a discrete analogy of the said functional has been received. The get analogy is of tensor character what constitutes a natural outcome of application of Taylor's polynomials to its derivation. It is a function of nodal values of vector magnetic potential and scalar electric potential. A system of nonlinear equations for minimization of the functional has been obtained.

Key words: variational problem, energetic functional, invariant approximations, electromagnetic field.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

М. Говыковыч, Р. Фильц

Национальный университет "Львовская политехника"
ул. Бандеры, 12, 79013 Львов, Украина
howykowycz@ieee.org

На основании полученного в Части 1 выражения энергетического функционала для формулирования вариационной задачи анализа электромагнитного поля и методики инвариантных приближений сформировано дискретный аналог указанного функционала. Полученный аналог имеет тензорный характер, что является следствием применения для его формирования многочленов Тейлора. Он является функцией значений векторного потенциала магнитного поля и скалярного электрического потенциала в узлах сетки. Получено систему уравнений для минимизации данного функционала.

Ключевые слова: вариационная задача, энергетический функционал, инвариантные приближения, электромагнитное поле.

Стаття надійшла до редколегії 3.08.2009
Прийнята до друку 7.09.2009