ТЕОР. ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2009. Вип. 60. С. 54-57 *2009. Is. 60. P. 54-57*

УДК 621.372.061

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Я. Шмигельський

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua

Для числового моделювання періодичних режимів нелінійної динамічної системи запропоновано новий варіант демпфованого методу Ньютона. На відміну від класичного демпфованого методу Ньютона, пропонований метод може працювати з нульовим значенням параметра демпфування. З'ясовано, що для вибору на кожній ітерації оптимального значення параметра демпфування можна використати відомі алгоритми.

Ключові слова: нелінійна динамічна система, математична модель, усталений режим, метод Ньютона.

Формулювання задачі. Будемо розглядати нелінійну радіоелектронну систему з періодичним збудженням, математична модель якої має вигляд

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t), \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t+T) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$.

Припустимо, що права частина (1) неперервна за t, неперервно диференційована за $\boldsymbol{x}$ і система (1) має *T*-періодичний розв'язок.

Нехай $\boldsymbol{x}(t) = \varphi(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ – розв'язок системи (1) з початковими умовами $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Позначимо $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_0,T) = \varphi(t_0+T,\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ – відображення точки $\boldsymbol{x}_0$ уздовж траєкторії $\boldsymbol{x}(t)$ за період Т. Тоді, як відомо, пошук періодичного режиму системи (1) можна звести до розв'язування рівняння

$$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_T = 0,\ \ \boldsymbol{x}_T = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_0,T). \tag{2}$$

Розв'яжемо (2) відносно $\boldsymbol{x}_0$ методом Ньютона, одержимо

$$\boldsymbol{x}_0^{k+1} = \boldsymbol{x}_0^{k} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}_k)^{-1}(\boldsymbol{x}_0^{k} - \boldsymbol{x}_T^{k}),\ \ k = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{x}_T{}^k = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_0{}^k, T)$, $\boldsymbol{W}_k = \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_T}{\partial \boldsymbol{x}_0}\right|_{\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0{}^k}$, $\boldsymbol{I}$ – одинична матриця.

Під час аналізування періодичних режимів нелінійних систем метод (3) у чистому вигляді практично не використають через малу область збіжності.

Демпфовані методи Ньютона. Для розширення області збіжності в ітераційний процес (3) звичайно вводиться демпфуючий множник, $\alpha \in [0,1]$:

$$\boldsymbol{x}_0{}^{k+1} = \boldsymbol{x}_0{}^k - \alpha(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}_k)^{-1}(\boldsymbol{x}_0{}^k - \boldsymbol{x}_T{}^k) . \tag{4}$$

Метод (4) називають демпфованим методом Ньютона. Для практичних розрахунків метод (4) повинен бути доповнений алгоритмом вибору кроку α , що ґрунтується на принципі зменшення відхилу [1, 2]

$$\delta_k = \left\| \boldsymbol{x}_0{}^k - \boldsymbol{x}_T{}^k \right\| . \tag{5}$$

Разом разом з алгоритмом вибору параметра α, що забезпечує зменшення нев’язки на кожній ітерації, метод (4) має квадратичну збіжність поблизу розв’язку за стандартних для методу Ньютона обмежень на відображення $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_0, T)$ і його похідну $\boldsymbol{W} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_T}{\partial \boldsymbol{x}_0}$ [1].

Метод (4) при $\alpha \ll 1$ має неприємну особливість “тупцювати” на місці. Тому вводимо деяке мінімальне значення $\alpha_{\min}$ й при $\alpha \le \alpha_{\min}$ використання методу (4) вважаємо недоцільним (зазвичай $\alpha_{\min} = 0{,}1$ [1, 2]). У цьому випадку під час аналізування періодичних режимів, як звичайно, переходять на метод простої ітерації для (2)

$$\boldsymbol{x}_0{}^{k+1} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_0{}^k, T) , \tag{6}$$

тобто на пряме інтегрування системи (1) протягом m періодів (здебільшого приймають $2 \le m \le 5$). Після цього роблять спробу знову перейти на метод (4) [2].

Є й інші способи введення демпфувального параметра в ітераційний процес (3). Наприклад, у [3] запропоновано такий метод:

$$\boldsymbol{x}_0{}^{k+1} = \boldsymbol{x}_0{}^k - (\boldsymbol{I} - \alpha \boldsymbol{W}_k)^{-1}(\boldsymbol{x}_0{}^k - \boldsymbol{x}_T{}^k) . \tag{7}$$

Цей метод цікавий тим, що при $\alpha = 1$ він перетворюється в метод Ньютона (3), а при $\alpha = 0$ – у метод простої ітерації (6). Тому, на відміну від (4), цей метод у принципі працює за будь-якого значення $\alpha \in [0,1]$. Хоча строгого доведення збіжності методу (7) нема, його широко використовували для аналізу періодичних режимів електронних схем [3, 4].

Модифікований демпфований метод Ньютона. Перепишемо (3) у вигляді

$$\boldsymbol{x}_0{}^{k+1} = \boldsymbol{x}_T{}^k - ((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}_k)^{-1} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{x}_0{}^k - \boldsymbol{x}_T{}^k) . \tag{8}$$

Уведемо в (8) множник, що демпфрувальний

$$\boldsymbol{x}_0{}^{k+1} = \boldsymbol{x}_T{}^k - \alpha((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}_k)^{-1} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{x}_0{}^k - \boldsymbol{x}_T{}^k) , \tag{9}$$

Легко побачити, що ітераційний процес (9), як і (7), при $\alpha = 1$ перетворюється в метод Ньютона (3), а при $\alpha = 0$ – у метод простої ітерації для рівняння (6).

Виконаємо елементарні перетворення і запишемо (7) у такий спосіб:

$$x_0^{k+1} = x_0^k - [\alpha(I - W_k)^{-1} + (1-\alpha)I](x_0^k - x_T^k) . \qquad (10)$$

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ – множина всіх квадратних матриць порядку n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді $Z(\alpha) = \alpha(I - W_k)^{-1} + (1-\alpha)I$ при $\alpha \in [0,1]$ – це відрізок в $M_n(\mathbb{R})$, що з'єднує матрицю $(I - W_k)^{-1}$ (метод Ньютона для (2)) і одиничну матрицю I (метод простої ітерації для (2)).

На перший погляд, методика одержання ітераційного процесу у вигляді (97) або (10) трохи штучна. Насправді все це має цікаву інтерпретацію.

З огляду на єдиність розв'язків системи (1) замість задачі (2) в разі пошуку періодичних режимів можна розглядати задачу

$$x_0 - x_T = 0, \ \ x_0 = p^{-1}(x_T, T) \ , \qquad (11)$$

де p^{-1} – оператор, зворотний до p. Застосування оператора p^{-1} означає просто інтегрування системи (1) від x_T до x_0 у бік зменшення часу.

Розв'яжемо (11) відносно x_T методом Ньютона, одержимо

$$x_T^{k+1} = x_T^k - (W_k^{-1} - I)^{-1}(x_0^k - x_T^k) , \qquad (12)$$

де $W_k^{-1} = \left.\dfrac{\partial x_0}{\partial x_T}\right|_{x_T = x_T^k}$ – матриця, обернена до W_k.

Перетворимо матрицю в (12):

$$\begin{aligned}(W_k^{-1} - I)^{-1} &= (W_k(I - W_k)^{-1} + I) - I = \\ &= (W_k + I - W_k)(I - W_k)^{-1} - I = (I - W_k)^{-1} - I\end{aligned} .$$

Отже, (8) і (12) збігаються. Оскільки (12) – це звичайний метод Ньютона, то для введення демпфувального множника α і його оптимального вибору на кожній ітерації можна використати вже відомі методи [1, 2]. У цьому разі обмеження на параметр $\alpha \geq \alpha_{\min}$ нема.

1. *Ермаков В.В., Калиткин Н.Н.* Оптимальний шаг и регуляризация метода Ньютона // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 2. С. 491–497.
2. *Синицкий Л.А., Хвищун И.А., Шмигельский Я.А.* О надежном алгоритме поиска периодических режимов в нелинейных цепях // Теор. электротехника. 1981. Вып. 30. С. 114–125.
3. *Colon F.R. and Trick T.N.* Fast periodic steady-state analysis for large-signal electronics circuits // IEEE J. Solid-State Circuits. Aug. 1973. Vol. SC-8. P. 260–269.
4. *Kakizaki M. and Sugawara T.*A modified Newton method for the steady-state analysis // IEEE Trans. Computer-Aided Design. Oct. 1985. Vol. CAD-4. P. 662–667.

A MODIFIED METHOD FOR THE COMPUTATION OF THE PERIODIC STEADY-STATE RESPONSE OF NONLINEAR SYSTEMS

Ya. Shmygelsky

Ivan Franko National University of L'viv
Tarnavsky Str., 107, UA-79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua

For computation of the periodic steady state of the nonlinear dynamic system the new variant of damping Newton method is offered. Unlike classical damping Newton method, the offered method can work with zero value of the damping parameter. It is shown, that for a choice on each iteration of optimum value of the damping parameter it is possible to use known algorithms

Key words: nonlinear circuits, mathematical model, steady state calculation, Newton method.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Я. Шмигельский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львов, Украина
shmygelsky@electronics.wups.lviv.ua

Для численного моделирования периодических режимов нелинейной динамической системы предложено новый вариант демпфирования метода Ньютона. В отличие от классического демпфированного метода Ньютона, предлагаемый метод может работать с нулевым значением параметра демпфирования. Показано, что для выбора на каждой итерации оптимального значения параметра демпфирования возможно использовать известные алгоритмы.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, математическая модель, установившийся режим, метод Ньютона.

Стаття надійшла до редколегії 15 06.2009
Прийнята до друку 30.06.2009