ТЕОР. ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2009. Вип. 60. С. 21-26 *2009. Is. 60. P. 21-26*

УДК 53.072

АЛГОРИТМ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Г. Злобін, О. Довгаль

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
zlobin@electronics.wups.lviv.ua

Рівняння Ван-дер-Поля давно відоме в математиці та електротехніці, його особливістю є те, що коефіцієнт жорсткості рівняння пропорційний до значення його параметра μ. Алгоритми числового інтегрування диференціальних рівнянь дуже часто тестують саме на цьому рівнянні. Описано алгоритм аналітичного розв'язування цього рівняння методом малого параметра та досліджено його стійкість щодо параметра μ. Оскільки алгоритм потребує великої кількості рутинних алгебричних операцій, то використано систему комп'ютерної математики Maple.

Ключові слова: рівняння Ван-дер-Поля, аналітичні обчислення, системи комп'ютерної математики.

Для розв'язання рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u=\mu(1-u^2)\frac{du}{dt} \tag{1}$$

за малих значень μ ми використаємо метод малого параметра.

Оскільки рівняння (1) не містить часу, то для цього можливі періодичні розв'язки довільного періоду, який залежатиме від μ. Крім того, рівняння (1) не змінюється в разі заміни t на $t+\Delta t$. Тому будь-які розв'язки цього рівняння, в тому числі і періодичні, є розв'язками, якщо в ньому замінити t на $t+\Delta t$. Це дасть підстави припустити, що в початковий момент часу для шуканого періодичного розв'язку величина $\dot{x}$ перетворюється в нуль. Справді, нехай T – період шуканого періодичного розв'язку. Звідси $x(0) = x(T)$ і в інтервалі $(0, T)$ повинен існувати такий момент часу t_1 для якого $\dot{x}$ перетворюється в нуль. Приймемо цей момент часу за початковий, це означатиме, що величина t в рівнянні (1) замінена величиною $t+t_1$. Отже, у разі шукання періодичного розв'язку рівняння (1) завжди можна вважати, що $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=0$.

Далі знайдемо періодичні розв'язки рівняння (1). Розглянемо спочатку породжувальне рівняння

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+x_0=0\,. \tag{2}$$

Загальний розв'язок цього рівняння, для якого $\dot{x}(0)=0$, має вигляд $x_0(t) = M_0 \cos(kt)$, де M_0 — довільна стала. Цей розв'язок буде періодичним з періодом $T = 2\pi$. Прийнявши розв'язок, що відповідає якому-небудь фіксованому значенню M_0 за породжувальний, будемо шукати періодичний розв'язок рівняння (1), який перетворюється в породжувальний за $\mu=0$. Цей розв'язок $x(t,\beta,\mu)$, визначений початковими умовами

$$x(0,\beta,\mu) = x_0(0) + \beta = M_0 + \beta, \dot{x}(0,\beta,\mu) = 0\,, \tag{3}$$

де $\beta=\beta(\mu)$ – невідома функція від μ, така що $\beta(0) = 0$. Період розв'язку для розглянутої системи заздалегідь невідомий. Цей період $T+\alpha \equiv 2\pi+\alpha$, де $\alpha=\alpha(\mu)$ – також невідома функція від μ, для якої очевидно $\alpha(0)=0$. Обидві невідомі функції α і β знайдемо з умов періодичності розв'язку $x(t,\beta,\mu)$

$$\begin{aligned} x(T+\alpha,\beta,\mu) - x(0,\beta,\mu) \equiv x(T+\alpha,\beta,\mu) - M_0 - \beta = 0 \\ \dot{x}(T+\alpha,\beta,\mu) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

У [3] доведено, що кожному некратному і відмінному від нуля кореню рівняння

$$P(M_0) = \int_0^{2\pi} f(M_0 \cos u, -kM_0 \sin u, 0)du = 0$$

відповідає єдиний аналітичний розв'язок рівняння (4), а отже, єдиний періодичний розв'язок рівняння (1), який буде аналітичним щодо μ. Аналітичним щодо μ буде також період $2\pi+\alpha$.

Нехай період коливань

$$T_0 = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + h_3\mu^3 + \cdots)\,, \tag{5}$$

де h_i – деякі коефіцієнти. Позначимо $A = 1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + h_3\mu^3 + \ldots$ і замінимо в рівнянні (1) змінну t змінною τ: $t = A\tau$. Тоді шуканому періодичному розв'язкові рівняння (1) з періодом (5) відповідає періодичний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2} + A^2x(\tau) = \mu A\left(1 - x^2(\tau)\right)\frac{dx(\tau)}{d\tau} \tag{6}$$

з періодом 2π. Цей розв'язок також буде аналітичним щодо μ, тому будемо шукати його у вигляді

$$x(\tau) = X_0(\tau) + \mu X_1(\tau) + \mu^2 X_2(\tau) + \cdots. \tag{7}$$

Підставимо (7) у (6) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при однакових степенях μ, отримаємо систему диференціальних рівнянь щодо $X_0(\tau)$, $X_1(\tau)$,... Прирівняємо до нуля коефіцієнти при $\sin(\tau)$, $\cos(\tau)$ у правих частинах цих рівнянь, щоб уникнути резонансу. З цих коефіцієнтів знайдемо коефіцієнти при $\sin(\tau)$, $\cos(\tau)$ у функціях $X_0(\tau)$, $X_1(\tau)$,..., а також коефіцієнти h_i.

Результат моделювання. Результатом розв'язування рівняння (1) є функція

$$x(t) = X_0(t/A) + \mu X_1(t/A) + \mu^2 X_2(t/A) + \cdots,$$

для якої коефіцієнти h_i з непарними індексами дорівнюють нулю, а з парними – наведені далі (перші десять):

$$h_2 = \frac{1}{16}, \quad h_4 = -\frac{5}{3072}, \quad h_6 = -\frac{431}{884736},$$

$$h_8 = \frac{557039}{5096079360}, \quad h_{10} = \frac{51720623}{9172942848000}.$$

Функції $X_i(\tau)$:

$$X_0 = 2\cos(\tau);$$

$$X_1 = \frac{3}{4}\sin(\tau) - \frac{1}{4}\sin(3\tau);$$

$$X_2 = -\frac{1}{8}\cos(\tau) + \frac{3}{16}\cos(3\tau) - \frac{5}{96}\cos(5\tau);$$

$$X_3 = -\frac{7}{256}\sin(\tau) + \frac{21}{256}\sin(3\tau) - \frac{35}{576}\sin(5\tau) + \frac{7}{576}\sin(7\tau);$$

$$X_4 = \frac{73}{12288}\cos(\tau) - \frac{47}{1536}\cos(3\tau) + \frac{1085}{27648}\cos(5\tau) - \frac{2149}{110592}\cos(7\tau) + \frac{61}{20480}\cos(9\tau);$$

$$X_5 = -\frac{12971}{4423680}\sin(\tau) - \frac{2591}{294912}\sin(3\tau) + \frac{52885}{2654208}\sin(5\tau) - \frac{110621}{6635520}\sin(7\tau) +$$
$$+\frac{7457}{1228800}\sin(9\tau) - \frac{5533}{7372800}\sin(11\tau);$$

$$X_6 = \frac{6479}{6635520}\cos(\tau) + \frac{48437}{35389440}\cos(3\tau) - \frac{259945}{31850496}\cos(5\tau) + \frac{4253767}{398131200}\cos(7\tau) -$$
$$-\frac{480523}{73728000}\cos(9\tau) + \frac{4937537}{2654208000}\cos(11\tau) - \frac{715247}{3715891200}\cos(13\tau);$$

$$X_7 = \frac{33114653}{44590694400}\sin(\tau) - \frac{82937}{212336640}\sin(3\tau) - \frac{1939625}{764411904}\sin(5\tau) +$$
$$\frac{1061235889}{191102976000}\sin(7\tau) - \frac{179467921}{35389440000}\sin(9\tau) + \frac{223342933}{9289728000}\sin(11\tau) -$$
$$-\frac{195050323}{346816512000}\sin(13\tau) + \frac{138697}{2774532096}\sin(15\tau).$$

На рис. 1–3 показано декілька графіків, отриманих унаслідок моделювання

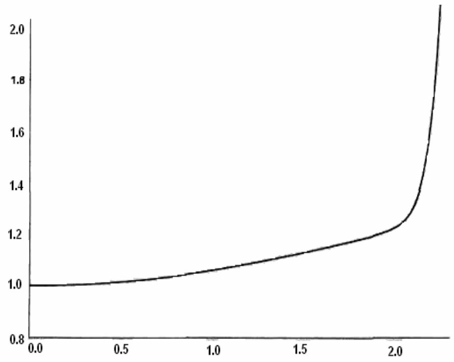

Рис. 1. Графік залежності A(μ)

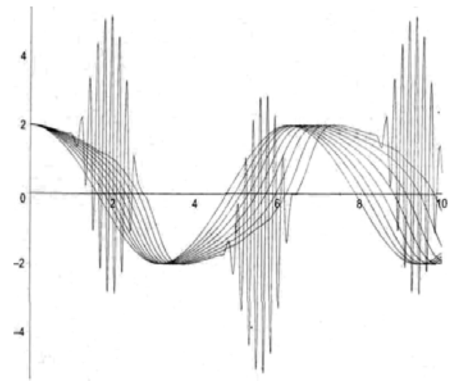

Рис. 2. Графік функції x(t) для μ=0,1;0,4;0,6;0,8;1,0;1,2;1,4;1,6;1,8

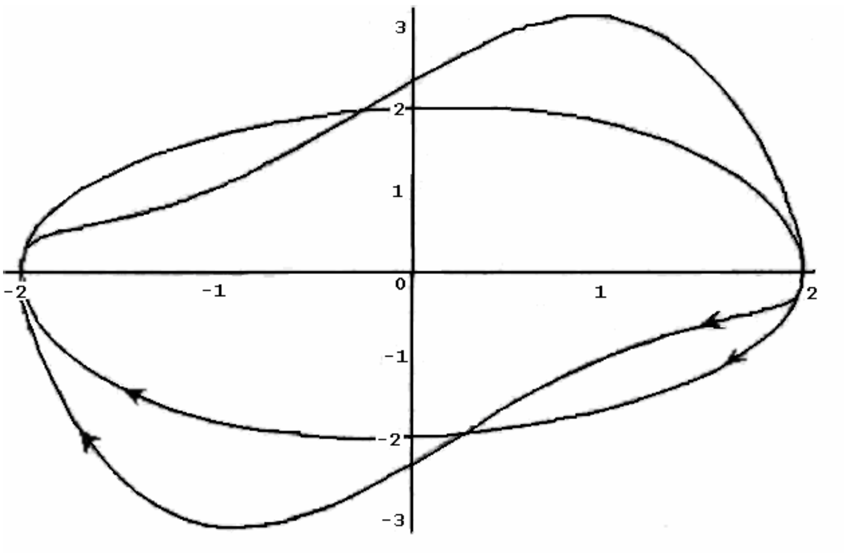

Рис. 3. Фазові портрети $\dot{x}(x)$ за μ = 0,1; 1,4

Отже, як приклад, розглянуто задачу знаходження періодичних розв'язків рівняння Ван-дер-Поля за достатньо малих значень параметра μ. Результат виявився збіжним за μ<1,5, що є хорошим для аналітичного розв'язування цього нелінійного диференціального рівняння. Отриманий результат такий, що:

- система є автоколивною;
- у разі прямування μ до нуля автоколивання в системі прямують до гармонічних, що дає змогу створювати генератор гармонічних коливань;
- період автоколивань є функцією μ, і зростає зі зростанням μ;
- амплітуда автоколивань слабко залежить від μ, і приблизно дорівнює 2;

- зі зростанням μ зростає і максимальне значення *dx/dt*, і відхилення фазового портрету системи від еліптичного.

Алгоритм розв'язування цього рівняння реалізований як сценарій системи комп'ютерної математики (СКМ) Maple, це значно зменшило обсяг роботи, потрібний для опрацювання виразів. СКМ також доцільно використовувати для задач інших типів, у яких чітко відомий алгоритм аналітичних перетворень.

---

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1956. 491 с.
4. *Анісімов І.О.* Коливання та хвилі. К.: Академпрес, 2003. 280 с.

ANALYTIC ALGORITHM FOR SOLVING VAN DER POL EQUATION FOR COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS

G. Zlobin, A. Dovhal

Ivan Franko National University of L'viv
Tarnavsky Str., 107, UA–79017 Lviv, Ukraine
zlobin@electronics.wups.lviv.ua

Van der Pol equation is well known in mathematics and electronics. It has such a feature that it's stiffness parameter is proportional to it's parameter μ. Numerical algorithms for solving ordinary differential equations very often use this equation for testing purposes. In this article we describe algorithm of solving analytically this equation using the method of small parameter and we research this algorithm for it's stability with respect to parameter μ. Because of large number of ordinary analytic operations which are required for this algorithm we are using computer algebra system Maple.

Key words: Van der Pol equation, analytic computation, computer algebra system.

АЛГОРИТМ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Г. Злобин, О. Довгаль

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
zlobin@electronics.wups.lviv.ua

Уравнение Ван-дер-Поля давно известно в математике и электротехнике. Его особенностью является то, что коэффициент жёсткости уравнения пропорционален значению его параметра μ. Алгоритмы численного интегрирования дифференциальных уравнений очень часто тестируют именно на этом уравнении. Мы описали алгоритм аналитического решения этого уравнения методом малого параметра и исследовали его устойчивость по отношению к параметру μ. Поскольку алгоритму нужно большое количество рутинных алгебраических операций, мы использовали систему компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: уравнение Ван-дер-Поля, аналитические решения, системы компьютерной математики.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.2009
Прийнята до друку 30.06.2009