

УДК 621.3.011.71

## МОДЕЛЮВАННЯ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ ЛАНЦЮЖКОВОЮ ЕЛЕКТРИЧНОЮ СХЕМОЮ

Ю. Мочульський

Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна  
mochulsky@ukr.net

Наведено результати дослідження усталеного режиму в ланцюжковій CL-схемі, яку використовують як електричну модель композитних матеріалів з мікроскопічних елементів. З'ясовано, що в такій схемі за скінченної кількості ланок можуть існувати два режими: швидкого загасання сигналу і дискретної стоячої хвилі, які залежать від частоти вхідного сигналу.

*Ключові слова:* композитні матеріали, ланцюжкова CL-схема, дискретна стояча хвиля.

Останніми роками синтезовано нові композитні матеріали, які мають від'ємні значення електричної і магнітної проникності в певному діапазоні частот електромагнітних хвиль. Ці матеріали виготовляють з мікроскопічних елементів, розміщених у певному порядку в прозорому середовищі. Завдяки від'ємним значенням електричної і магнітної проникності ці матеріали мають цікаві властивості. Зокрема, вони можуть не відбивати електромагнітних хвиль певного діапазону, тобто робити літак невидимим для радіолокатора.

У літературі з'ясовано, що для моделювання процесів у таких матеріалах можна використовувати ланцюжкову електричну схему з ємностей та індуктивностей. Ми розглянемо усталений режим у лінійній ланцюжковій схемі, показаній на рис. 1.

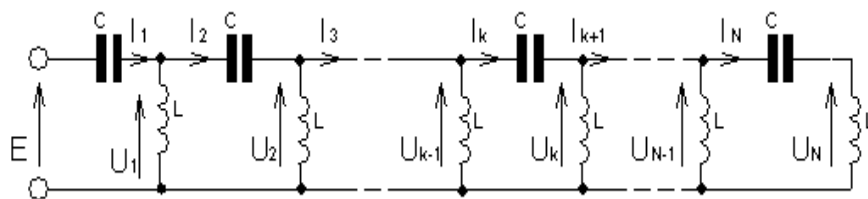


Рис. 1. Ланцюжкова CL-схема

Як видно з цієї схеми, для двох середніх ланок можна записати наступні рівняння:

$$\begin{cases} \dot{I}_{k-1} = j \cdot \omega C (\dot{U}_{k-2} - \dot{U}_{k-1}) \\ \dot{U}_{k-1} = j \cdot \omega L (\dot{I}_{k-1} - \dot{I}_k) \\ \dot{I}_k = j \cdot \omega C (\dot{U}_{k-1} - \dot{U}_k) \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язавши ці два рівняння щодо  $U_k$  отримаємо

$$\dot{U}_k = \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) \cdot \dot{U}_{k-1} - \dot{U}_{k-2}. \quad (2)$$

Уведемо нормовану частоту  $\Omega = \omega / \omega_0$ , де  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  – резонансна частота однієї СL-ланки. Тоді характеристичне рівняння для різницевого рівняння (2) матиме вигляд

$$\lambda^2 - \left(2 - \frac{1}{\Omega^2}\right) \cdot \lambda + 1 = 0. \quad (3)$$

Це рівняння має два корені

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot \Omega^2 - 1 + \sqrt{1 - 4\Omega^2}}{2 \cdot \Omega^2}; \quad \lambda_2 = \frac{2 \cdot \Omega^2 - 1 - \sqrt{1 - 4\Omega^2}}{2 \cdot \Omega^2}. \quad (4)$$

Тобто розв'язок різницевого рівняння (2) матиме вигляд

$$\dot{U}_k = \dot{A}_1 \cdot \lambda_1^k + \dot{A}_2 \cdot \lambda_2^k, \quad (5)$$

де  $\dot{A}_1$  та  $\dot{A}_2$  – сталі величини, які, як звичайно, визначають з початкових умов.

З рівняння (4) випливає, що при  $\Omega < 0,5$  обидва корені будуть дійсними, при  $\Omega > 0,5$  – комплексно спряженими, а при  $\Omega = 0,5$  – кратними і такими, що дорівнюють одиниці.

Проаналізуємо перший випадок. Як засвідчує аналіз,  $\lambda_1$  у разі зміни  $\Omega$  від нуля до 0,5 змінюється від нуля до -1. Це означає, що модуль  $\lambda_1^k$  зі збільшенням  $k$  зменшується до нуля. Водночас у цьому діапазоні  $\lambda_2$  змінюється від  $-\infty$  до -1. Це означає, що  $\lambda_2^k$  зі збільшенням  $k$  буде, коливаючись зростати до  $\pm\infty$ . Залежності  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  від нормованої частоти показані на рис. 2.

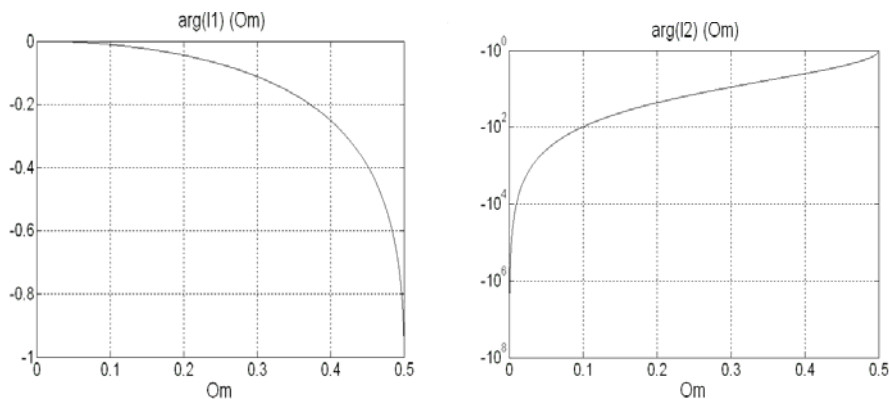


Рис. 2. Залежність коренів характеристичного рівняння від нормованої частоти

Проте, враховуючи, що  $k < N$ , і, крім того,  $\lambda_2^k$  множать на  $\dot{A}_2$ , не можна стверджувати, що  $\dot{U}_k$  буде зростати. Для визначення залежності  $\dot{U}_k$  від частоти і  $N$  необхідно проаналізувати залежності  $\dot{A}_1$  та  $\dot{A}_2$  від цих величин.

Як зазначено вище,  $\dot{A}_1$  та  $\dot{A}_2$ , зазвичай, визначають з початкових умов. Однак у нашій задачі задана лише одна початкова умова ( $\dot{U}_0 = \dot{E}$ ). Для знаходження другої сталої величини використаємо рівняння для останньої CL-ланки:

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= j\omega L \cdot \dot{I}_N \quad ; \\ \dot{I}_N &= j\omega C \cdot (\dot{U}_{N-1} - \dot{U}_N). \end{aligned}$$

З цих рівнянь отримаємо

$$\dot{U}_N = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1} \cdot \dot{U}_{N-1}. \quad (6)$$

Використаємо рівняння (5), отримаємо систему рівнянь для знаходження сталих  $\dot{A}_1$  та  $\dot{A}_2$

$$\begin{cases} \dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{E} \\ \dot{A}_1 \cdot \lambda_1^N + \dot{A}_2 \cdot \lambda_2^N = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1} \cdot (\dot{A}_1 \cdot \lambda_1^{N-1} + \dot{A}_2 \cdot \lambda_2^{N-1}) \end{cases} \quad (7)$$

Розв'яжемо цю систему, отримаємо

$$\dot{A}_1 = \frac{(\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1} - \lambda_2) \cdot \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1^{N-1} \cdot (\lambda_1 - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1}) - \lambda_2^{N-1} \cdot (\lambda_2 - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1})} \cdot \dot{E}; \quad (8)$$

$$\dot{A}_2 = \frac{(\lambda_1 - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1}) \cdot \lambda_1^{N-1}}{\lambda_1^{N-1} \cdot (\lambda_1 - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1}) - \lambda_2^{N-1} \cdot (\lambda_2 - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1})} \cdot \dot{E}. \quad (9)$$

Як бачимо з цих рівнянь, коефіцієнти  $A_1$  і  $A_2$ , на відміну від класичного випадку, залежать від  $\Omega$  і  $N$  (оскільки  $\lambda$  залежить від  $\Omega$ ).

Для спрощення, зважаючи на те, що схема лінійна, а отже, всі відгуки пропорційні до вхідної напруги, прийемо  $\dot{E} = 1$ . Крім того, поділимо у формулах (8) і (9) чисельники і знаменники на відповідні чисельники. Отримаємо такі вирази:

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{1 - \dot{B}}; \quad \dot{A}_2 = \frac{\dot{B}}{\dot{B} - 1}, \quad (10)$$

$$\text{де } \dot{B} = \frac{\Omega^2 - (\Omega^2 - 1) \cdot \dot{\lambda}_1}{\Omega^2 - (\Omega^2 - 1) \cdot \dot{\lambda}_2} \cdot \left( \frac{\dot{\lambda}_1}{\dot{\lambda}_2} \right)^{N-1}. \quad (11)$$

Аналіз цього виразу засвідчує, що при  $\Omega < 0,5$  величина  $B$  помітно відрізняється від нуля лише при  $\Omega > 0,45$  (рис. 3).

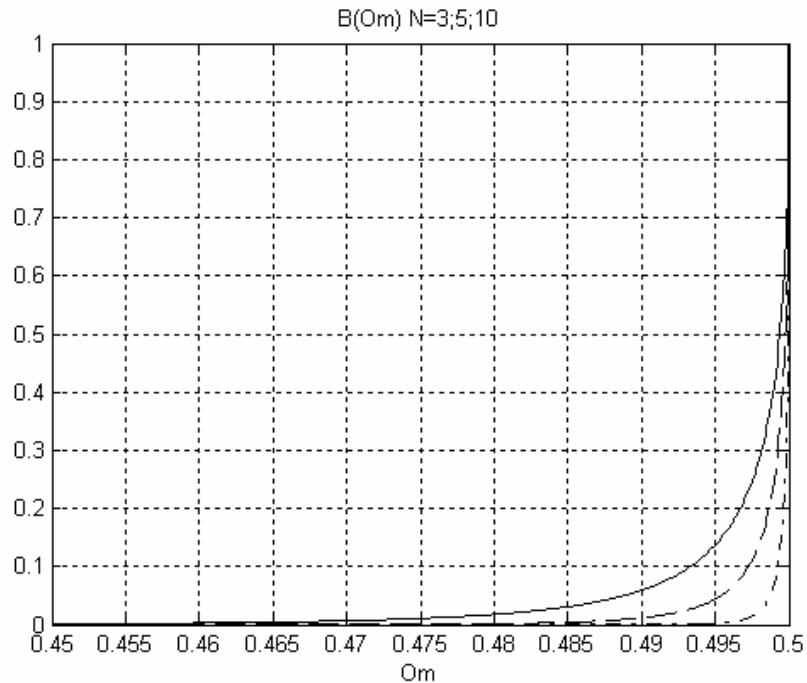


Рис. 3. Залежність  $B$  від  $\Omega$  для різних значень  $N$  ( суцільна лінія –  $N=3$ , пунктирна –  $N=5$ , штрих-пунктирна –  $N=10$ )

У таблиці наведено кілька значень  $B$  за різних частот для  $N=3$ .

Таблиця

$\Omega$	0,1	0,3	0,45
$B$	$10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_2$	-100	-20	-2

Для наведених у таблиці значень  $B$  значення  $A_2$  практично збігатиметься з  $B$ , а отже, добуток  $A_2 \cdot \lambda_k$  значно менший від одиниці для будь-яких  $k \leq 3$ . Залежності  $A_1$  і  $A_2$  від частоти для декількох значень  $N$  відображено на рис. 4. На рис. 5 показано залежність напруги на індуктивностях для різних довжин ланцюжка при  $\Omega=0,3$  і  $\Omega=0,49$ . Як бачимо з рис. 5, за низьких частот напруга на індуктивностях швидко зменшується і практично не залежить від кількості ланок. У разі наближення частоти до граничної ( $\Omega_0=0,5$ ) швидкість зменшення напруги знижується, причому тим повільніше, чим більша кількість ланок.

Зазначимо, що такі результати якісно можна отримати і без наведених вище міркувань, виходячи з того, що опір конденсатора обернено пропорційний до частоти, а опір індуктивності прямо пропорційний.

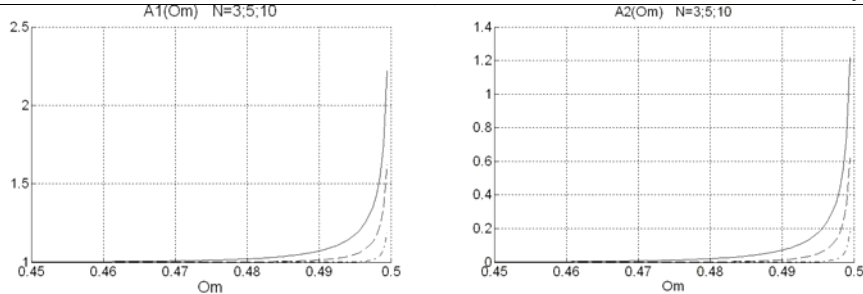


Рис. 4. Залежності коефіцієнтів  $A_1$  і  $A_2$  від частоти ( суцільна лінія –  $N=3$ , пунктирна –  $N=5$ , штрих-пунктирна –  $N=10$ )

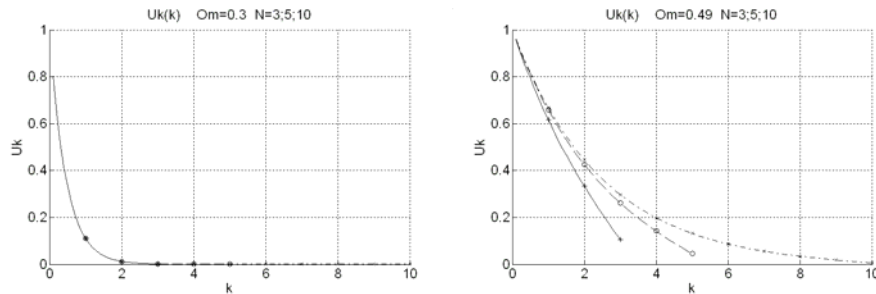


Рис. 5. Залежність напруг на індуктивностях від частоти сигналу та кількості ланок (+ – для  $N=3$ , o – для  $N=5$  і x – для  $N=10$ ).

Проаналізуємо другий випадок ( $\Omega > 0,5$ ), коли корені характеристичного рівняння комплексно спряжені. Як видно з рівняння (4), модулі обох коренів дорівнюватимуть одиниці за будь-якого  $\Omega$ . Звідси випливає, що модулі  $(\lambda_1)^k$  і  $(\lambda_2)^k$  також дорівнюють одиниці, тобто модуль напруги  $\dot{U}_k$ , як бачимо з рівняння (5), за будь-яких  $k$  є в межах від нуля до суми модулів  $\dot{A}_1$  і  $\dot{A}_2$ .

Для отримання залежності  $\dot{A}_1$  і  $\dot{A}_2$  від частоти сигналу і кількості ланок проаналізуємо залежність  $\dot{B}$  від цих величин. Оскільки, що  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  комплексно спряжені, то легко побачити, що модуль  $\dot{B}$  дорівнює одиниці для будь-яких значень  $\Omega$  і  $N$ , тобто можна записати  $\dot{B} = e^{j\psi}$ . А з цього випливає, що

$$|\dot{A}_1| = |\dot{A}_2| = \frac{1}{2 \cdot \sin(\psi)}; \quad \arg(\dot{A}_1) = -\arg(\dot{A}_2) = \frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi) - 1}; \quad (12)$$

тобто  $\dot{A}_1$  і  $\dot{A}_2$  комплексно спряжені.

На підставі цього можна стверджувати, що  $\dot{A}_1 \cdot \lambda_1^k$  і  $\dot{A}_2 \cdot \lambda_2^k$  будуть комплексно спряженими функціями  $k$  і їхня сума, тобто  $\dot{U}_k$ , буде періодично змінюватися від нуля до подвоєного значення модуля  $\dot{A}_1$  або  $\dot{A}_2$ , бо модулі  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  дорівнюють одиниці.

На підставі наведених результатів, напругу на індуктивностях схеми можна легко пояснити за допомогою векторної діаграми (рис. 6). На вході ( $k=0$ ) обидва вектори  $\dot{A}_1$  і

$\dot{A}_2$  будуть повернуті, відповідно, на кут  $\varphi_0$  та  $-\varphi_0$ , і їхня векторна сума дорівнюватиме  $E$ .

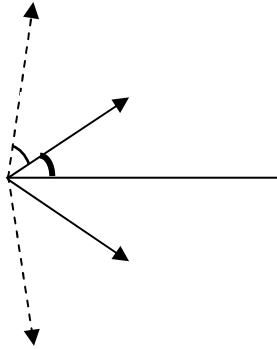


Рис. 6. Векторна діаграма напруг на індуктивностях

На першій індуктивності напруга визначатиме сума цих же векторів, але повернутих, відповідно, на кути  $\varphi_1$  і  $-\varphi_1$ , які дорівнюють аргументам  $\lambda$ . Для наступної індуктивності вектори знову повернуть на кути  $\varphi_1$  та  $-\varphi_1$  і визначатимуть напругу на цій індуктивності. Отже, напруга вздовж ланцюжка буде змінюватися в межах від нуля до подвоєного значення модуля  $A$ . Крок зміни цієї напруги залежить від кута  $\varphi_1$ , який, як бачимо з рис. 7, змінюється від  $180^\circ$  до нуля в разі зміни нормованої частоти від 0,5 до безмежності. Якщо кут  $\varphi_1=90^\circ$  (а це буде при

$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), то напруги на індуктивностях

повторюватимуться з періодом 2, а при  $\varphi_1=45^\circ$  ( $\Omega=1,3065$ ) – з періодом 4 (рис. 8). Для ліпшого уявлення про зміну напруги на індуктивностях вздовж ланцюжка на рис. 7 та рис. 8 показано залежність  $U_k$  від  $k$  за неперервної зміни  $k$  і для дискретних значень  $k$ . Залежності наведені для трьох різних значень  $N$ : суцільна лінія і знак “+” для  $N=3$ , пунктирна лінія і знак “o” –для  $N=5$  і штрихпунктирна лінія і знак “x” – для  $N=10$ .

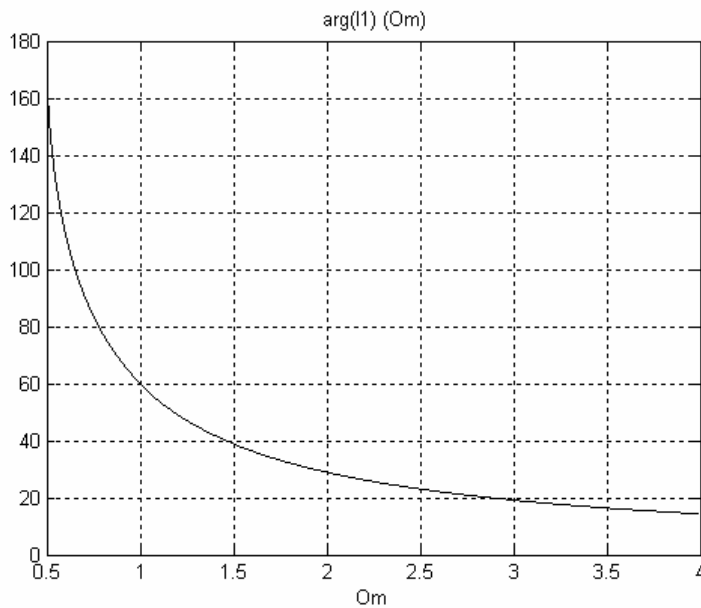


Рис. 7. Залежність аргументу  $\lambda_1$  від нормованої частоти

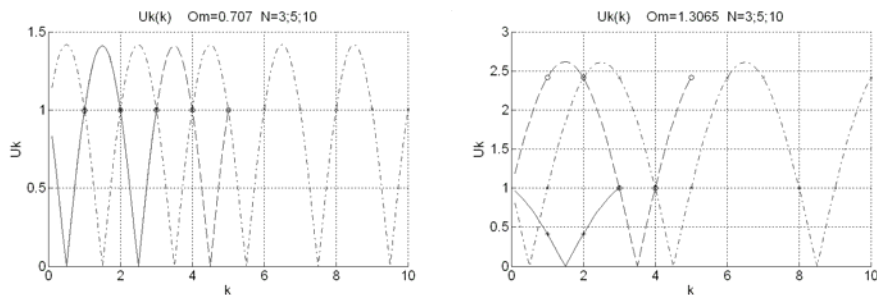


Рис. 8. Залежність напруги на індуктивностях від порядкового номера індуктивності

З показаних на рис. 8 залежностей випливає, що для певних частот напруга на деяких ланках може дорівнювати нулю. На рис. 9 зображено такий результат для чотирьох ланок.

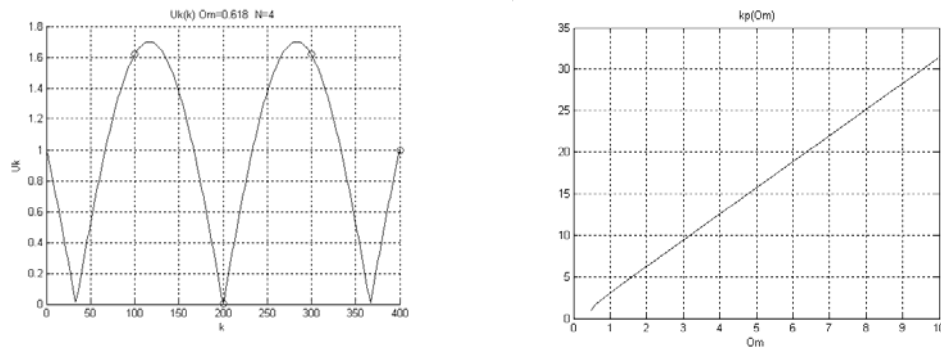


Рис. 9. Напруга на індуктивностях для схеми з чотирьох ланок

Рис. 10. Залежність довжини дискретної стоячої хвилі від частоти

Такі результати можна отримати й аналітично на підставі таких міркувань. Формулу (5), врахувавши, що  $\dot{A}_1$  і  $\dot{A}_2$  комплексно спряжені й модуль  $\lambda$  дорівнює одиниці, можна записати в такому вигляді:

$$\dot{U}_k = A \cdot e^{j\varphi_A} \cdot e^{jk\varphi_\lambda} + A \cdot e^{-j\varphi_A} \cdot e^{-jk\varphi_\lambda} = 2 \cdot A \cdot \cos(\varphi_A + k \cdot \varphi_\lambda) \quad (13)$$

Тобто напруга  $\dot{U}_k$  буде дійсною (при  $\dot{E} = 1$ ) і змінюватиметься за законом косинуса дискретно. У разі зміни знака косинуса фаза цієї напруги стрибатиме на  $180^\circ$ . Можна зробити висновок, що в такій схемі виникає дискретна стояча хвиля як суперпозиція

падаючої ( $A \cdot e^{j\varphi_A} \cdot e^{jk\varphi_k}$ ) і відбитої ( $A \cdot e^{-j\varphi_A} \cdot e^{-jk\varphi_k}$ ) хвилі. Довжина цієї хвилі (кількість ланок у періоді) дорівнює відношенню  $\pi$  до аргументу  $\lambda$  і її залежність від частоти показана на рис. 10.

Потрібно лише визначити залежність  $A$  від частоти і кількості ланок. Перш за все на підставі аналізу виразу (10) можна сказати, що значення модуля  $A$  може змінюватися від 0,5 (при  $B = -1$ ) до безмежності (при  $B = 1$ ). Останнє значення зрозуміле, оскільки ми аналізуємо схему без втрат. Отже, у ній виникатиме резонанс на певній частоті, за якого напруга на реактивних елементах дорівнюватиме безмежності. В реальних високочастотних схемах напруга буде скінченна, проте значно більша від вхідної. Кількість резонансних частот визначена половиною кількості реактивних елементів, тобто дорівнює  $N$ . А виникатиме резонанс при  $\arg(B)=0$ . Залежність  $\arg(B)$  від частоти і кількості ланок описує досить складний вираз. На рис. 11 показано графіки цих залежностей для  $N=3$  і  $N=10$ .

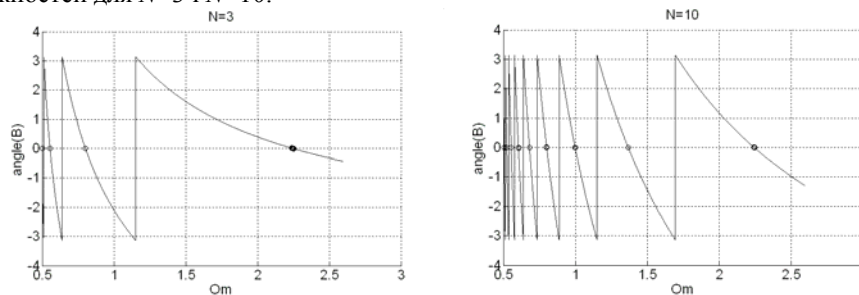


Рис. 11. Залежність  $\arg(B)$  від частоти

Отже, у проаналізованій ланцюжковій схемі залежно від частоти вхідного сигналу можливі два режими.

У разі частоти вхідного сигналу, меншій від половини резонансної частоти окремої ланки, напруга в ланцюжку швидко загасає, причому тим швидше, чим менша частота і кількість ланок.

За частоти вхідного сигналу, більшій від половини резонансної частоти окремої ланки, у схемі виникає дискретна стояча хвиля, амплітуда якої залежить від частоти сигналу та кількості ланок і для ланцюжка без втрат є в межах від амплітуди вхідного сигналу до безмежності.

1. *Kozyrev A.B., van der Weide D. W.* Nonlinear left-handed transmission line metamaterials. *J. Appl. Phys.* 2008. Vol. 41. 173001 p.
2. *Brouers F., Rauw D., Clerc J. P. & Giraud G.* Self-similar properties of the far-infrared and optical absorption of fractal metallic cluster *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49. N 20. 14582 p.



**DESIGN OF COMPOSITE MATERIALS BY CHAIN ELECTRIC CIRCUIT****Yu. Mochulsky**

*Ivan Franko National University of Lviv  
107 Tarnavsky Str., UA-79017 Lviv, Ukraine  
mochulsky@ukr.net*

The results of research of a withstand mode in a chain CL-circuit, which is used as an electric model of composite materials, made of microscopic elements are presented. It is shown that this circuit with a finite number of chains can have two modes: mode of rapid damping of signal and mode of discrete standing wave, depending on the frequency of input signal.

*Key words:* composite materials, chain CL-circuit, discrete standing wave.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ЦЕПОЧЕЧНОЙ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМОЙ****Ю. Мочульский**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франка  
ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина  
mochulsky@ukr.net*

Приведены результаты исследования установившегося режима в CL-цепочке, которую используют в качестве электрической модели композитных материалов из микроскопических элементов. Установлено, что в такой схеме при конечном числе цепочек могут существовать два режима: затухания сигнала и дискретной стоячей волны, в зависимости от частоты входного сигнала.

*Ключевые слова:* композитные материалы, цепочечная CL-схема, дискретная стоячая волна.

Стаття надійшла до редколегії 18.05.2009

Прийнята до друку 30.06.2009