

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА ЯВИЩ

УДК 681.518

### МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОЛЬОТУ КВАДРОКОПТЕРА З УРАХУВАННЯМ ОСОБЛИВОСТЕЙ СЕНСОРІВ

Б. Благітко, Ю. Мочульський

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна  
[blagitko@electronics.lnu.edu.ua](mailto:blagitko@electronics.lnu.edu.ua), [mochulsky@ukr.net](mailto:mochulsky@ukr.net)*

Наведено результати досліджень математичної моделі квадрокоптера в польоті з урахуванням особливостей сенсорів: висотоміра, 3-осьового гіроскопа, 3-осьового акселерометра, 3-осьового магнітометра. Математична модель квадрокоптера представлена системою диференціальних рівнянь у формі Коші 16-го порядку. Вхідною інформацією є значення висоти польоту квадрокоптера, значення кутів тангажу, крену, ролу та зміни їх у часі. Розглянуто спосіб пропорційно-диференціального керування для стабілізації квадрокоптера в польоті та оптимального виведення квадрокоптера на заданий режим. Пропорційно-диференціальний регулятор змінює прирости сили тяги чотирьох електродвигунів-гвинтів, знак приростів та моменти часу, у які повинні відбуватися всі ці зміни. Керуваність квадрокоптера в польоті перевірені на прикладі автоматичного виконання фігури простого пілотажу – горизонтальної вісімки – як з правим, так і з лівим поворотами.

*Ключові слова:* квадрокоптер, висотомір, 3-осьовий гіроскоп, 3-осьовий акселерометр, 3-осьовий магнітометр, керування.

Традиційно математична модель квадрокоптера описує динамічні процеси в системі загалом [1–5]. Однак це тільки перше наближення, адже система отримує інформацію про параметри польоту від сенсорів, покази яких не залежать від параметрів системи.

Ми пропонуємо модернізовану модель польоту квадрокоптера з сенсорами.

Квадрокоптер конструктивно є поєднанням двох підсистем: власне квадрокоптера як електромеханічної підсистеми і плати керування польотом як електронної підсистеми.

Електромеханічна підсистема реалізована у вигляді хрестоподібної балкової конструкції, у якій на кожному з кінців однакової довжини балок прикріплені електричні двигуни постійного струму з повітряними пропелерами із незмінюваним кутом атаки так, що сили тяги всіх чотирьох пар електричних двигунів-пропелерів спрямовані перпендикулярно до площини балкової конструкції, причому двигуни на сусідніх кінцях балок мають різні пропелери: один з них – правий пропелер, інший – лівий. Цю підсистему характеризують масою, моментом інерції та габаритними розмірами. Швидкості обертання роторів електродвигунів і, відповідно, сили тяги пропелерів змінюють, змінюючи напруги, які подають на обмотки електродвигунів. На рис. 1 показано стрижневу систему заміщення фізичної моделі квадрокоптера.

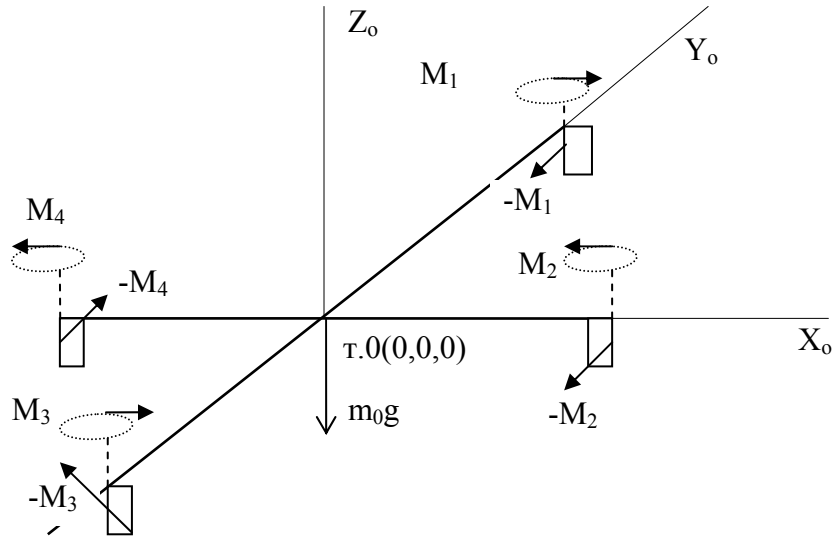


Рис. 1. Стрижнева система заміщення фізичної моделі квадрокоптера.

Електронна підсистема реалізована як плата управління силою тяги електродвигунів завдяки визначенням напруг, які необхідно подати на обмотки відповідних електродвигунів для переміщення квадрокоптера за заданою траєкторією. Обчислення необхідних значень напруг виконує мікроконтролер за законом пропорційно-диференціального (ПД) регулятора, порівнюючи поточні виміряні значення із заданими. Процес обчислення у мікроконтролері значення сигналів управління відбувається за результатами вимірювань сенсорів, які розміщені на платі управління, механічно прикріпленій до хрестоподібної балкової конструкції квадрокоптера.

На Рис. 2 зображено блок-схему моделі квадрокоптера разом із платою керування та сенсорами.

Відповідно до цього і математичну модель квадрокоптера в польоті з урахуванням особливостей сенсорів потрібно розглядати як дві суттєво різні математичні моделі:

- власне математичної моделі квадрокоптера, як БПЛА, на вхід якого надходять значення напруг живлення електричних двигунів, а виходами є кутові швидкості обертання валів електричних двигунів;
- математичної моделі ПД регулятора, на вхід якого від сенсорів надходять виміряні значення, а мікроконтролер реалізує алгоритм ПД регулятора і видає на вихід значення напруг живлення двигунів.

Політ квадрокоптера забезпечують чотири двигуни з пропелерами, розміщеними на відстані  $L$  від центра мас. У роботі використано таку математичну модель двигунів:

$$\frac{d\omega_i}{dt} + a_1 \cdot \omega_i + a_2 \cdot \omega_i^2 + a_0 = b_m \cdot U_i, \quad i = 1..4, \quad (1)$$

де  $a_0, a_1, a_2, b_m$  – параметри двигуна;  $\omega_i$  – кутові швидкості двигунів;  $U_i$  – прикладена до двигунів напруга.

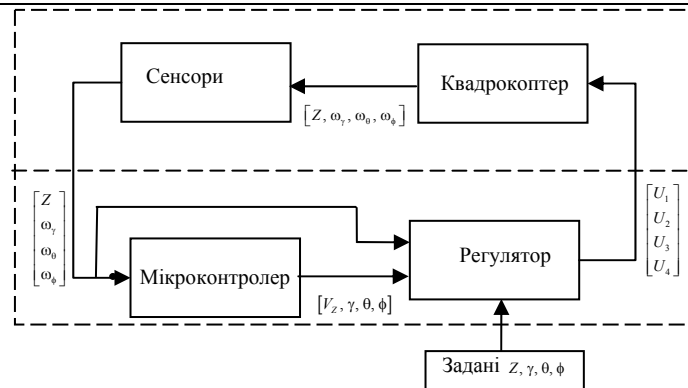


Рис. 2. Блок-схема квадрокоптера з регулятором.

Сили тяги двигунів квадрокоптера  $F_i$  пропорційні до квадрата кутової швидкості роторів і мають однаковий напрям. Замінімо ці сили однією еквівалентною силою тяги

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = k \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \quad (2)$$

прикладеною до центра мас квадрокоптера і напрямленою вздовж осі  $Z_0$ .

Сумарний момент сил відносно осі тангажу

$$M_\theta = M_1 + M_3 = L \cdot (F_1 - F_3) = k \cdot L \cdot (\omega_1^2 - \omega_3^2), \quad (3)$$

а сумарний момент сил відносно осі крену –

$$M_\gamma = M_2 + M_4 = L \cdot (F_4 - F_2) = k \cdot L \cdot (\omega_4^2 - \omega_2^2), \quad (4)$$

де  $L$  – відстань від центра мас квадрокоптера до двигунів.

Сумарний момент сил відносно осі ролання

$$M_\phi = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = k_1 \cdot (F_1 - F_2 + F_3 - F_4) = b \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2), \quad (5)$$

де  $b$  – коефіцієнт аеродинамічного опору.

Використаємо матрицю повороту і визначимо проєкції сили  $F$  на осі координат системи  $XYZ$ , пов'язаної із Землею (вісь  $X$  напрямлена на схід,  $Y$  – на північ,  $Z$  – вертикально)

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot (\cos(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)) \\ F_y &= F \cdot (-\sin(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \cos(\phi) \cdot \sin(\theta)) \\ F_z &= F \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (6)$$

З урахуванням сили опору повітря і закону Ньютона рух квадрокоптера опишемо такою системою диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{V}_X \\ \dot{V}_Y \\ \dot{V}_Z \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\omega}_\gamma \\ \dot{\omega}_\theta \\ \dot{\omega}_\phi \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \\ F \cdot (\cos(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)) / m - k_{opx} \cdot V_X / m \\ F \cdot (-\sin(\phi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \cos(\phi) \cdot \sin(\theta)) / m - k_{opy} \cdot V_Y / m \\ -g + F \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) / m - k_{opz} \cdot V_Z / m \\ \omega_\gamma \\ \omega_\theta \\ \omega_\phi \\ ((J_y - J_z) \cdot \omega_\theta \cdot \omega_\phi - J_\Gamma \cdot \omega_\theta \cdot \omega_\Gamma + M_\gamma) / J_x \\ ((J_z - J_x) \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\phi + J_\Gamma \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\Gamma + M_\theta) / J_y \\ ((J_x - J_y) \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\theta + M_\phi) / J_z \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_1 - a_2 \cdot \omega_1^2 + bm \cdot U_1 \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_2 - a_2 \cdot \omega_2^2 + bm \cdot U_2 \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_3 - a_2 \cdot \omega_3^2 + bm \cdot U_3 \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_4 - a_2 \cdot \omega_4^2 + bm \cdot U_4 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де  $X, Y, Z$  – координати квадрокоптера;  $V_x, V_y, V_z$  – проекції швидкості на відповідні осі координат;  $k_{opx}, k_{opy}, k_{opz}$  – коефіцієнти опору повітря;  $m$  – маса квадрокоптера;  $\gamma, \theta, \psi$  – відповідно, кути крену, тангажу та рискання;  $\omega_\gamma, \omega_\theta, \omega_\psi$  – кутові швидкості обертання квадрокоптера;  $J_x, J_y, J_z$  – моменти інерції квадрокоптера відносно осей координат;  $\omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$  – сумарний вектор кутових швидкостей двигунів.

Для керування польотом квадрокоптера використовують регулятор, який задає необхідні напруги на двигуни пропелерів. Оскільки проекції сумарної сили тяги всіх пропелерів на осі  $X, Y$  та  $Z$  визначені цією силою та кутами тангажу, крену і рискання, то регулятор може регулювати лише одну з проекцій. Звичайно для регулювання вибирають проекцію сумарної сили тяги на вісь  $Z$ , яка задає висоту квадрокоптера.

Ми вибрали ПД регулятор, який регулює висоту польоту та кути нахилу квадрокоптера, змінюючи вертикальну складову сили тяги пропелерів і моменти сил, які обертають квадрокоптер.

Основними сенсорами є висотомір, який визначає висоту  $Z$ , на якій перебуває квадрокоптер, та 3-осьовий гіроскоп, який визначає проекції кутової швидкості  $\omega_\gamma, \omega_\theta, \omega_\phi$  на осі тангажу, крену та рискання, відповідно. За цими чотирма величинами на підставі наведених нижче формул мікроконтролер визначає необхідні для регулятора вертикальну складову швидкості  $V_Z$  та кути тангажу  $\gamma$ , крену  $\theta$  та рискання  $\psi$ .

Рівняння описаного регулятора мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{mg + K_{zp} \cdot (Z_d - Z) + K_{zd} \cdot (\dot{Z}_d - \dot{Z})}{\cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)} \\
 M_\theta &= K_{\theta p} \cdot (\theta_d - \theta) + K_{\theta d} \cdot (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) \\
 M_\gamma &= K_{\gamma p} \cdot (\gamma_d - \gamma) + K_{\gamma d} \cdot (\dot{\gamma}_d - \dot{\gamma}) \\
 M_\phi &= K_{\phi p} \cdot (\phi_d - \phi) + K_{\phi d} \cdot (\dot{\phi}_d - \dot{\phi})
 \end{aligned} \tag{8}$$

У формулі (8) задані регулятору значення висоти та кутів позначені індексом  $d$ . Коefіцієнти  $K$  з індексом  $p$  відповідають пропорційному регулятору, а з індексом  $d$  – диференціальному.

Знайдемо, які швидкості обертання пропелерів необхідні для того, щоб забезпечити потрібні значення  $F, M_\gamma, M_\theta, M_\phi$ . Для цього розв’яжемо систему рівнянь (2)–(5) відносно квадратів кутових швидкостей:

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= \frac{F}{4k} + \frac{M_\theta}{2kL} + \frac{M_\phi}{4b} \\
 \omega_2^2 &= \frac{F}{4k} - \frac{M_\gamma}{2kL} - \frac{M_\phi}{4b} \\
 \omega_3^2 &= \frac{F}{4k} - \frac{M_\theta}{2kL} + \frac{M_\phi}{4b} \\
 \omega_4^2 &= \frac{F}{4k} + \frac{M_\gamma}{2kL} - \frac{M_\phi}{4b}
 \end{aligned} \tag{9}$$

З рівняння (1) визначимо напруги, які необхідно подати на двигуни для отримання потрібних кутових швидкостей

$$U_i = (a_1 \cdot \omega_i + a_2 \cdot \omega_i^2 + a_0) / b_m, \quad i = 1 \dots 4. \tag{10}$$

Висоту  $Z$  визначають висотоміром. Ми для моделювання висотоміра використали значення змінних стану  $h_i$  та  $h_{i+1}$  моделі квадрокоптера в два сусідні моменти часу  $t_i$  та  $t_{i+1}$ .

Вертикальну швидкість обчислюємо, чисельно диференціюючи висоту квадрокоптера

$$V_{Z,i+1} = \frac{Z_{i+1} - Z_i}{t_{i+1} - t_i}, \tag{11}$$

де  $Z_{i+1}$  та  $Z_i$  – висота квадрокоптера в моменти часу  $t_{i+1}$  та  $t_i$ , відповідно. Цю операцію реалізує мікроконтролер.

Аналогічно, кутові швидкості  $\omega_\gamma, \omega_\theta$  та  $\omega_\psi$ , які повинен дати 3-осьовий гіроскоп, – це відповідні змінні стану моделі квадрокоптера. Маючи покази гіроскопа, можемо за допомогою формул числового інтегрування обчислити кути тангажу, крену та рискання. Урахувавши, що гіроскоп має зміщення нуля  $\Delta$ , отримаємо формули для обчислення кутів крену, тангажу та рискання в момент часу  $t_{i+1}$  на підставі значень цих кутів у момент часу  $t_i$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{i+1} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_\gamma(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta_\gamma dt + \gamma_i \approx \gamma_i + \omega_{\gamma,i} \cdot (t_{i+1} - t_i) + \Delta_\gamma \cdot (t_{i+1} - t_i) \\
 \theta_{i+1} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_\theta(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta_\theta dt + \theta_i \approx \theta_i + \omega_{\theta,i} \cdot (t_{i+1} - t_i) + \Delta_\theta \cdot (t_{i+1} - t_i). \\
 \phi_{i+1} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_\phi(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta_\phi dt + \phi_i \approx \phi_i + \omega_{\phi,i} \cdot (t_{i+1} - t_i) + \Delta_\phi \cdot (t_{i+1} - t_i)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Унаслідок похибки нуля гіроскопа (третього доданка) похибка визначення кутів тангажу, крену та рискання нагромаджуватиметься, що призводить до відхилення траєкторії польоту від заданої.

Для дослідження моделі квадрокоптера як динамічної системи з сенсорами вибрано фігуру простого пілотажу – горизонтальну вісімку. У разі виконання цієї фігури квадрокоптер повинен у горизонтальній площині зробити повне коло, а після цього виконати друге коло в протилежному напрямі для того, щоб повернутися в початкову точку. Для руху по колу на заданій висоті до квадрокоптера повинна бути прикладена напрямлена догори вертикальна сила, яка дорівнює  $mg$ , та горизонтальна доцентрова сила, значення якої визначатиме радіус кола. Для створення доцентрової сили необхідно нахилити квадрокоптер, тобто задати ненульовий кут тангажу або крену чи обидва кути одночасно. Тоді силу тяги пропелерів можна розкласти на дві складові – горизонтальну та вертикальну. Під час руху по колу вектор доцентрової сили рівномірно змінює свій напрям. Таку доцентрову силу можна створити, задавши певний сталий кут тангажу або крену та рівномірно в часі змінювати кут рискання. Після того, як квадрокоптер, описавши коло, повернеться в початкову точку, необхідно виміняти напрям зміни кута рискання на протилежний і описати ще одне коло.

З використанням наведеної вище моделі проведено моделювання польоту квадрокоптера по горизонтальній вісімці. У цьому разі через кожні 30 мс знімали покази з моделей висотоміра та гіроскопа. У модель гіроскопа закладено похибку нуля 0,06 °/с. На підставі цих даних мікроконтролер обчислював вертикальну швидкість, а також кути тангажу, крену та рискання за формулами (11) і (12).

Параметри квадрокоптера, який моделювали, наведені в таблиці.

Параметри квадрокоптера		
$g = 9,81 \text{ м/с}^2$	$k = 2,98 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м/рад}^2$	$J_{xx} = J_{yy} = 4,856 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
$m = 0,468 \text{ кг}$	$b = 1,14 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{рад}^2$	$J_{zz} = 9,801 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
$L = 0,225 \text{ м}$	$J_I = 3,357 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$A_x = A_y = A_z = 0,25 \text{ кг/с}$

Під час обчислень використовували такі параметри електродвигунів:

$$a_0=189,63 \text{ рад/с}^2; a_1=6,0612 \text{ с}^{-1}; a_2=0,0122 \text{ рад}^{-1}; b_m=280,19 \text{ рад/В/с}^2;$$

Для аналізу застосовували неявний метод TR-BDF2 (на першому етапі рівняння інтегрують методом трапецій, а на другому етапі застосовують формулу диференціювання назад другого порядку) [6].

Після експериментального дослідження впливу параметрів регулятора на швидкість перехідного процесу для регулятора вибрали  $K_{zd} = 5$ ;  $K_{zp} = 6,25$ ;  $K_{yd} = K_{yd} = K_{od} = 2,5$ ;

$K_{\gamma p} = K_{\psi p} = K_{\theta p} = 4,5$ . Регулятору задавали сталу висоту  $Zd = 5$  м, кут крену постійно дорівнював нулю, а кут тангажу задавали таким, що дорівнює  $3^\circ$ .

Для виконання вісімки кожні 30 мс змінювали задані регулятору значення кута ристання за законом

$$\phi_d = \begin{cases} \frac{3 \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{90} \cdot t & \text{при } t < 180 \text{ с} \\ \frac{3 \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{90} \cdot (t - 180) & \text{при } 180 \text{ с} < t < 360 \text{ с} \end{cases} \quad (13)$$

Коли не було похибки нуля гіроскопа, квадрокоптер описував горизонтальну вісімку [5]. Однак у разі похибки нуля гіроскопа  $\pm 0,06$  °/с унаслідок похибок визначення кутів тангажу і крену траєкторія польоту суттєво відрізняється від вісімки (рис. 3).

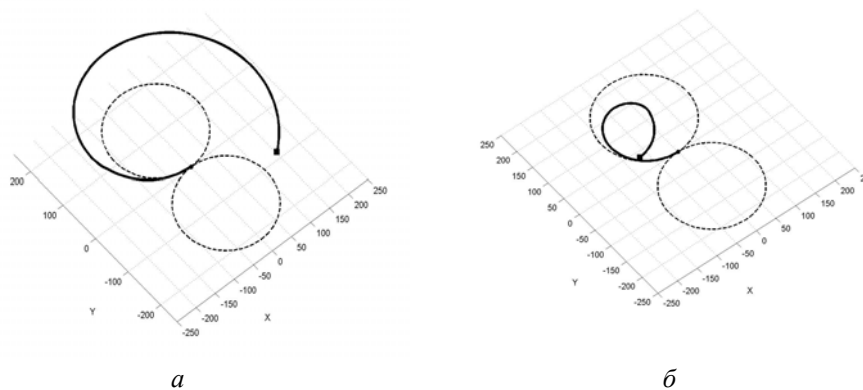


Рис. 3. Траєкторія польоту квадрокоптера в разі похибки нуля гіроскопа (вигляд зверху):

$a - \Delta = +0,06$  °/с;  $b - \Delta = -0,06$  °/с.

Для того щоб провести корекцію кутів положення квадрокоптера, використовують обчислення цих кутів за показами акселерометра.

Трьохосьовий акселерометр надає проєкції  $(A_{x_0}, A_{y_0}, A_{z_0})$  суми вектора прискорення вільного падіння і вектора абсолютного прискорення об'єкта на осі  $X_0, Y_0, Z_0$  системи координат, пов'язаної з об'єктом. У разі нерухомого об'єкта або під час його рівномірного руху наведені вище проєкції будуть проєкціями вектора прискорення вільного падіння  $\vec{G}$  на осі  $X_0, Y_0, Z_0$  квадрокоптера, тобто

$$\vec{G} = \vec{i} \cdot A_{x_0} + \vec{j} \cdot A_{y_0} + \vec{k} \cdot A_{z_0}, \quad (14)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори декартової системи координат.

Розглянемо дві системи координат: систему  $XYZ$ , пов'язану із Землею (вісь  $X$  напрямлена на схід,  $Y$  – на північ,  $Z$  – вертикально), і систему  $X_0Y_0Z_0$ , пов'язану з квадроко-

птером. На рис. 4 зображено площину  $XOZ$  (вісь  $Y$  напрямлена перпендикулярно до цієї площини).

Сума векторів  $A_{y_0}$  та  $A_{z_0}$  дорівнює вектору  $A_{yzo}$ , який лежить у площині  $Y_0OZ_0$ , перпендикулярній до осі  $X_0$ . Без власного прискорення сума вектора  $A_{yzo}$  з вектором  $A_{x_0}$  повинна дорівнювати вектору прискорення земного тяжіння  $G$ . Усі ці три вектори лежать в одній площині.

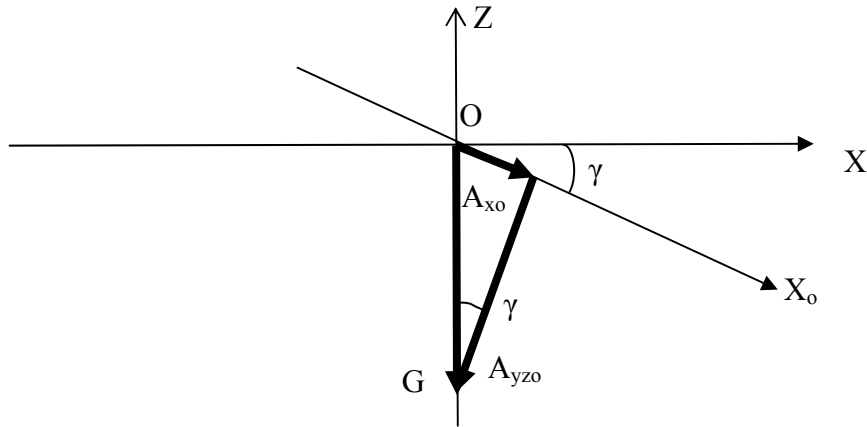


Рис. 4. Площина  $XOZ$ .

Як бачимо з рис. 4, кут між векторами  $G$  і  $A_{yzo}$  дорівнює куту крену  $\gamma$  (як кути з взаємно перпендикулярними сторонами). Урахувавши те, що довжина вектора  $A_{yzo}$  дорівнює  $\sqrt{A_{y_0}^2 + A_{z_0}^2}$ , отримаємо

$$\gamma = \arctan\left(\frac{A_{x_0}}{\sqrt{A_{y_0}^2 + A_{z_0}^2}}\right). \quad (15)$$

Аналогічно кут тангажу

$$\theta = \arctan\left(\frac{A_{y_0}}{\sqrt{A_{x_0}^2 + A_{z_0}^2}}\right). \quad (16)$$

На жаль, аналогічну формулу для кута ризикувати отримати неможливо, тому що вектор  $G$  напрямлений по осі  $Z$ , довкола якої обертається квадрокоптер у разі ризику.

Для корекції кута ризику використовують не акселерометр, а магнітометр. Трьохосьовий магнітометр визначає проекції вектора магнітної індукції на осі  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  квадрокоптера (відповідно,  $B_{x_0}$ ,  $B_{y_0}$  та  $B_{z_0}$ ). Для переходу до інерційної системи координат  $XYZ$  використаємо матрицю повороту системи координат на кути  $\gamma$  і  $\theta$ . Ураховуючи, що в північній півкулі вектор  $B_{z_0}$  напрямлений до центра Землі (тобто протилежний до осі  $Z$ ), отримуємо



$$\begin{aligned} B_x &= B_{x0} \cdot \cos(\gamma) - B_{z0} \cdot \sin(\gamma) \\ B_y &= B_{x0} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\gamma) + B_{y0} \cdot \cos(\theta) + B_{z0} \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \quad (17)$$

Сума векторів  $B_x$  та  $B_y$  напрямлена на північний магнітний полюс (рис. 5).

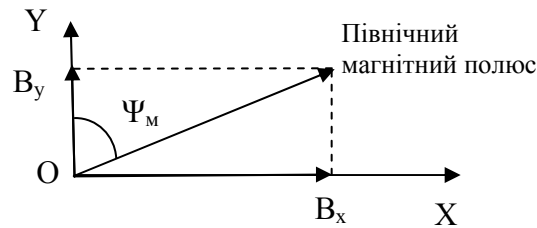


Рис. 5. Вектори магнітної індукції в площині XOY.

Як бачимо з рис. 5, відхилення умовного носа квадрокоптера (першого двигуна) від напрямку на північний магнітний полюс визначене формулою

$$\phi_m = -\arctg\left(\frac{B_x}{B_y}\right). \quad (18)$$

Знак “-” означає, що квадрокоптер відхилився на кут  $\psi_m$  проти годинникової стрілки.

Для отримання кута ризику (відхилення квадрокоптера від географічного північного полюса) необхідно врахувати кут магнітного відхилення  $\delta$  для місця перебування квадрокоптера

$$\phi = \phi_m + \delta. \quad (19)$$

Наприклад, для Львова цей кут дорівнює  $+5^\circ 37'$ .

Як показано на рис. 3, унаслідок похибки нуля гіроскопа квадрокоптер відхиляється від руху по колу. Водночас коректувати кути тангажу і крену не можна, бо під час руху по колу абсолютне прискорення не дорівнює нулю.

Тому траєкторію криволінійної вісімки замінено траєкторією польоту за двома правильними шестикутниками. Під час руху по ребрі шестикутника встановлюється рівномірний рух, що дає змогу коректувати кути тангажу і крену.

Для корекції кутів тангажу і крену кожні 5 с знімали покази акселерометра. Цю корекцію можна виконувати лише тоді, коли квадрокоптер перебуває в стані спокою або прямолінійного рівномірного руху. У цьому стані модуль вектора прискорення

$$A = \sqrt{A_{x0}^2 + A_{y0}^2 + A_{z0}^2} \quad (20)$$

повинен дорівнювати прискоренню земного тяжіння  $G$ .

Тому в ході моделювання перевіряють умову

$$\frac{G-A}{G} < 0.00001, \quad (21)$$

і лише в разі її виконання відповідно до формул (15) і (16) коректують кути тангажу і крену.

На рис. 6, *a* показано зміну кута тангажу на відрізку від 10 до 80 с. Як бачимо, кожні 5 с відбувається корекція кута, проте в разі зміни напрямку руху (35 і 65 с) корекція не відбувається, бо квадрокоптер у цей час рухається прискорено. З рис. 6, *б* випливає, що корекція кута ристання відбувається кожні 5 с.

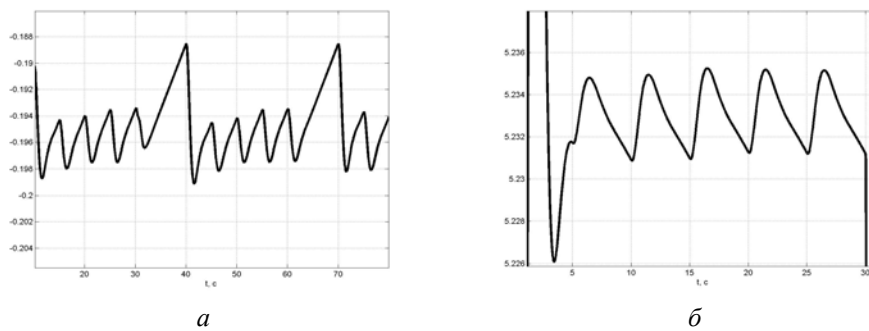


Рис. 6. Корекція кута тангажу (*a*) та ристання (*б*).

На рис. 7 показано траєкторію руху квадрокоптера по двох шестикутниках у разі похибки нуля гіроскопа, що дорівнює 0,06 %/с та її корекції за допомогою акселерометра і магнітометра.

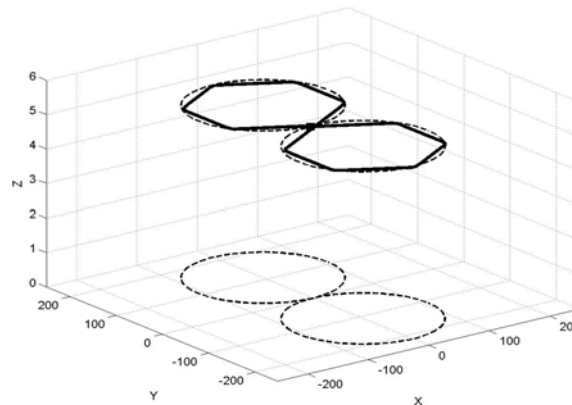


Рис.7. Траєкторія польоту квадрокоптера за даними сенсорів: висотоміра, 3-осьового гіроскопа, 3-осьового акселерометра та 3-осьового магнітометра.

Розглянуті вище процеси відбуваються за умови, що динамічна система без затримки забезпечує стійкий розв'язок і, відповідно, нормальний політ квадрокоптера [4].

1. *Huang H.* Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin // IEEE International Conference on Robotics and Automation. – May 2009. – P. 3277–3282.
2. *Wissiere D.* Experimental autonomous flight of a small-scaled helicopter using accurate dynamics model and low-cost sensors / David Wissiere, Piere-Jean Bristeau, Alain Piere Martin, Nikolas Petit // Proceeding of the 17<sup>th</sup> World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul Korea, July 6-11, 2008. – P. 14642–14650.
3. *Nartin P.* The True Role of Accelerometer Feedback in Quadrotor Control / Philip Nartin, Erwan Salaun // IEEE International Conference on Robotics and Automation, Anchorage, May 2010. – P. 1623–1629.
4. *Благітко Б.* Математичне моделювання процесу стабілізації квадрокоптера у польоті / Б. Благітко, Ю. Мочульський // Електроніка та інформ. технології. – 2013. – Вип. 3. – С. 96–107.
5. *Благітко Б.* Вплив затримки в управлінні на процес польоту квадрокоптера / Б. Благітко, Ю. Мочульський // Електроніка та інформ. технології. – 2014. – Вип. 4. – С. 96–107.
6. *Мочульський Ю.* MatLab у фізичних дослідженнях: навч.-метод. посіб. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 121 с.

*Стаття: надійшла до редакції* 14.12.2014,  
*доопрацьована* 20.01.2015,  
*прийнята до друку* 27.01.2015.

## MODELING OF QUADROPTER FLIGHT WITH THE PECULIARITIES OF SENSORS

**B. Blahitko, Yu. Mochulsky**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine  
[blagitko@electronics.lnu.edu.ua](mailto:blagitko@electronics.lnu.edu.ua), [mochulsky@ukr.net](mailto:mochulsky@ukr.net)*

The results of studies of mathematical models quadcopter flight with the peculiarities of sensors: altimeter, 3-axis gyroscope, 3-axis accelerometer, 3-axis magnetometer. The mathematical model presented quadcopter system differential equations in the form of Cauchy 16th order. Input information is the value of quadcopter altitude, meaning angles pitch, roll, yaw and change them at the time. The way proportional and differential control to stabilize quadcopter flight and optimal output quadcopter in preset mode. PD-controller changes the gain traction motors, four screws sign increments and the times in which should be all of these changes. Manageability quadcopter flight tested for example automatic execution of simple aerobatics figures - a horizontal figure eight - both right and left-turns.

*Key words:* quadcopter, altimeter, 3-axis gyroscope, 3-axis accelerometer, 3-axis magnetometer, control.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛЕТА КВАДРОКОПТЕРА  
С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ СЕНСОРОВ****Б. Благітко, Ю. Мочульський**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
Ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов Украина  
[blagitko@electronics.lnu.edu.ua](mailto:blagitko@electronics.lnu.edu.ua), [mochulsky@ukr.net](mailto:mochulsky@ukr.net)*

Приведено результаты исследований математической модели квадрокоптера в полете с учетом особенностей сенсоров: высотомера, 3-осевого гироскопа, 3-осевого акселерометра, 3-осевого магнитометра. Математическая модель квадрокоптера представлена системой дифференциальных уравнений в форме Коши 16-го порядка. Входной информацией является значение высоты полета квадрокоптера, значения углов тангажа, крена, рыскания и изменения их во времени. Рассмотрено способ пропорционально-дифференциального управления для стабилизации квадрокоптера в полете и оптимального вывода квадрокоптера на заданный режим. ПД регулятор меняет приросты силы тяги четырех электродвигателей-винтов, знак приростов и моменты времени, в которые должны происходить все эти изменения. Управляемость квадрокоптера в полете проверено на примере автоматического выполнения фигуры простого пилотажа – горизонтальной восьмёрки – как с правым, так и с левым поворотами.

*Ключевые слова:* квадрокоптер, высотомер, 3-осевой гироскоп, 3-осевой акселерометр, 3-осевой магнитометр, управление.