

УДК 577.352.5

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОВІДНОЇ СИСТЕМИ СЕРЦЯ ЛЮДИНИ

В. Горячко, Т. Горячко\*

*Національний університет "Львівська політехніка",  
вул. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна*

*\*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна*

Запропоновано математичну модель провідної системи серця людини як параметричного електричного кола з розподіленими параметрами. Погонні параметри такого кола отримано на підставі геометричних розмірів, фізичних характеристик середовища, а також апроксимованих експериментальних кривих іонних мембранних провідностей.

*Ключові слова:* математична модель, серце, електричні кола з розподіленими параметрами.

Математичне моделювання як метод дослідження щораз частіше застосовують у біології та медицині. Завдяки останнім досягненням учених у вивченні складних за природою електрофізіологічних процесів у біологічних об'єктах використання елементів фізики та математики стає одним з актуальних і перспективних напрямів їхніх досліджень. Передусім це стосується процесів збудження нервових і м'язових тканин. Для серцевого м'яза – міокарда – характерні такі властивості: збудливість, автоматія, провідність і скоротливість. Тому серце людини є складним і водночас цікавим об'єктом досліджень із застосуванням сучасних методів математичного моделювання.

Серцеві скорочення зумовлені електричними імпульсами, які виникають у спеціалізованій провідній системі серця і поширюються до всіх відділів міокарда. Провідна система серця (рис. 1) утворена синоатріальним вузлом (СА-вузлом), міжвузловими передсердними шляхами (1-3), атріовентрикулярним вузлом (АВ-вузлом), пучком Гіса (4) та його ніжками (5, 6) і волокнами Пуркін'є (7). Різні відділи провідної системи серця, а в умовах патології і ділянки міокарда, здатні генерувати імпульси. В нормі СА-вузол генерує імпульси з найбільшою частотою. Ці імпульси досягають інших відділів раніше, ніж там відбудеться спонтанна деполяризація. Отже, у нормі СА-вузол є водієм ритму серця. Частота генерування імпульсів у ньому визначає частоту серцевих скорочень. Імпульси, які виникають у СА-вузлі, поширюються передсердними шляхами до АВ-вузла, через нього – до пучка Гіса та волокнами Пуркін'є до м'язів шлуночків [1].

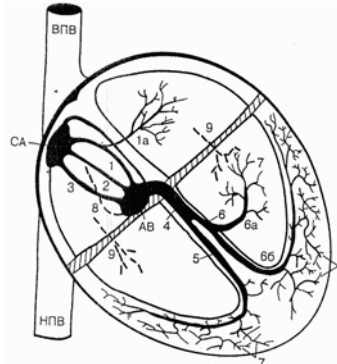


Рис. 1. Будова провідної системи серця.

Провідна система серця утворена спеціалізованими клітинами, які мають властивості автоматизму і високу (порівняно з неспеціалізованими м'язовими клітинами передсердь і шлуночків) швидкість проведення збудження. Ці клітини зв'язані між собою щільними контактами, які мають низький електричний опір і по яких збудження передається від одного волокна до іншого. Отже, кардіоміоцити об'єднані в неперервну електричну мережу – функціональний синцитій, що відрізняє міокард від інших збудливих тканин.

Збудливість, провідність і автоматія міокарда забезпечувані електрохімічними процесами, які виникають на плазматичній мембрані кардіоміоцитів. Важливим параметром, який характеризує ці процеси, є так званий мембранний потенціал (фактично це напруга між внутрішньою та зовнішньою частинами мембрани). Значення мембранного потенціалу у спокої залежить головню від концентрацій іонів зовні та всередині клітини, а під час збудження – від трансмембранних струмів іонів. Загалом ці процеси дуже подібні до процесів, які виникають під час збудження нервових волокон [3]. Тільки, на відміну від проведення імпульсів у нервових відростках, у виникненні потенціалу дії в кардіоміоцитах важливу роль разом з іонами натрію та калію відіграють ще іони кальцію.

З електричного погляду провідну систему серця людини можна розглядати як сукупність волокон, розміщених переважно паралельно одне до одного. З огляду на згаданий щільний електричний зв'язок між ними волокна певних ділянок серця можна трактувати як один еквівалентний коаксіальний провідник. Електричні параметри такого провідника визначені геометрією відповідної ділянки провідної системи серця, фізичними параметрами середовища та мембранним потенціалом. Тоді для одновимірної математичної моделі провідну систему серця можна описати як коаксіальний провідник з розгалуженнями та різними електричними параметрами на певних ділянках.

Для аналізу поширення нервового потенціалу загалом визнана математична теорія збудження Ходжкіна–Хакслі, яка ґрунтується на даних електрофізіологічних експериментів [4]. З використанням головних ідей та експериментальних даних цієї теорії ми розробили математичну модель поширення імпульсу у нервовому волокні як аналіз перехідного процесу в електричному колі з розподіленими параметрами [2].

Серцевий потенціал дії, як і у нейроні, зумовлений відкриттям і закриттям потенціалозалежних іонних каналів у мембрані кардіоміоцитів під впливом надпорогових стимулів. Рух іонів під час цього процесу відбувається в аксіальному та радіальному напрямках стосовно осі волокна. З урахуванням певної аналогії та особливостей електрофізіологічних процесів у кардіоміоцитах і нервових волокнах на підставі згаданої моделі ми розробили математичну модель провідної системи серця.

Провідності іонних каналів мембран  $g_K$ ,  $g_{Na}$ ,  $g_{Ca}$  мають складні залежності від мембранного потенціалу та від часу (рис. 2) [1, 3]. Ми запропонували апроксимацію нелінійностей кубічними сплайнами за умови, коли значення мембранного потенціалу досягає надпорогового рівня.

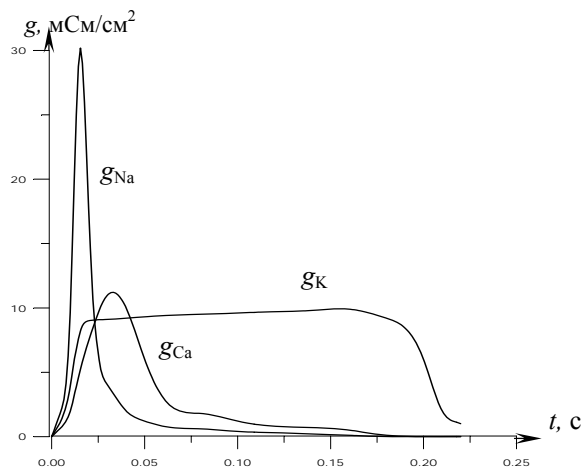


Рис. 2. Іонні провідності мембрани “швидкої” клітини-кардіоміоцита під час збудження.

З урахуванням електричних властивостей цитоплазми і зовнішнього середовища на одиницю довжини та апроксимованих провідностей іонних каналів і ємності мембрани еквівалентну схему одиниці довжини збудливої мембрани зображено у вигляді електричної схеми (рис. 3, а). Чотири ЕРС у паралельних гілках залежать від температури та концентрацій відповідних іонів усередині та зовні клітини і визначені за рівнянням Нернста:

$$E = \frac{RT}{F} \ln \frac{[C^+]_o}{[C^+]_i}, \quad (1)$$

де  $E$  – рівноважний потенціал;  $[C^+]_o$ ,  $[C^+]_i$  – концентрація іонів, відповідно, зовні та всередині клітини;  $R$  – газова стала;  $T$  – абсолютна температура;  $F$  – число Фарадея.

Після еквівалентування паралельних гілок отримуємо простішу електричну схему (див. рис. 3, б).

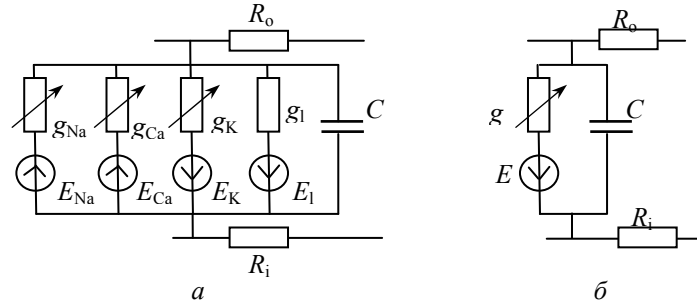


Рис. 3. Еквівалентна електрична схема одиниці довжини кардіоміоцита.

Виникнення і проведення серцевого потенціалу дії як електрофізіологічний процес можна описати за допомогою електричних величин – напруг та струмів, які змінюються вздовж поширення імпульсу. У розробленій одновимірній математичній моделі провідну систему серця подаємо у вигляді електричного кола з розподіленими параметрами, схемну інтерпретацію якого показано на рис. 4. Параметри каскадно з'єднаних ланок, що відповідають різним ділянкам серця, відрізняються між собою з урахуванням особливостей клітин. Наприклад, “швидкі” та “повільні” кардіоміоцити мають різні провідності іонних каналів.

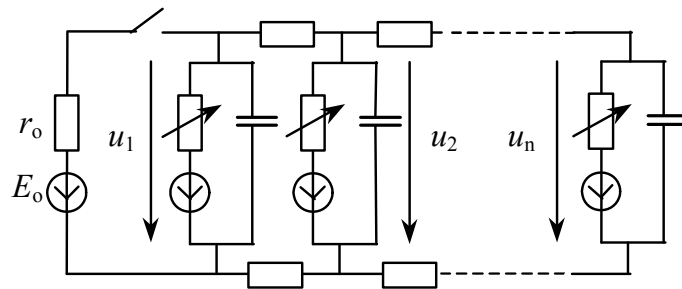


Рис. 4. Електрична схема провідної системи серця з розподіленими параметрами.

Математичну модель електричного кола з розподіленими параметрами можна описати за допомогою відомих телеграфних рівнянь. У нашому випадку вони матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} -\partial u / \partial x &= r_0 i; \\ -\partial i / \partial x &= g_0(u - E) + C_0 \partial u / \partial t, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $u$  – напруга між внутрішньою та зовнішньою частинами нервового волокна (мембранний потенціал);  $i$  – струм уздовж відростка нейрона;  $r_0$ ,  $g_0$ ,  $C_0$  – погонні параметри електричного кола (на одиницю довжини).

Для числового розв'язування параметричних диференціальних рівнянь у частинних похідних (2) ми застосували метод прямих. Після дискретизації за лінійною координатою рівняння набувають вигляду

$$u_m - u_{m-1} = r_0 \Delta x i_m;$$

$$i_m - i_{m-1} = g_{0,m-1} \Delta x (u_{m-1} - E_{m-1}) + C_0 \Delta x \frac{du_{m-1}}{dt}, \quad (3)$$

$$m = 1, 2, \dots, n,$$

де  $m$  – номер ділянки, на які розділено всю довжину волокна;  $\Delta x = l/n$  – лінійний крок інтегрування.

Перейдемо до однієї змінної – мембранного потенціалу  $u$ , отримаємо

$$(u_{m-1} - E_{m-1}) g_{0,m-1} \Delta x + C_0 \Delta x \frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{u_m - 2u_{m-1} + u_{m+1}}{r_0 \Delta x}, \quad (4)$$

$$m = 1, 2, \dots, n.$$

Використаємо для інтегрування диференціального рівняння (4) метод формул диференціювання назад (ФДН), остаточно отримаємо математичну модель поширення серцевого потенціалу дії:

$$-u_{m-1,k} / r + u_{m,k} (g_{m,k} + C \alpha_0 / h + 2 / r) - u_{m+1,k} / r =$$

$$= E_{m,k} g_{m,k} + C h^{-1} \sum_{s=1}^p a_s u_{m,k-s}; \quad (5)$$

$$m = 1, 2, \dots, n,$$

де  $g = g_0 \Delta x$ ;  $r = r_0 \Delta x$ ;  $C = C_0 \Delta x$ ;  $a_0, a_s$  – коефіцієнти методу ФДН;  $k$  – номер часового кроку інтегрування;  $h$  – ширина часового кроку інтегрування;  $p$  – порядок методу ФДН.

У матрично-векторній формі рівняння (4) на кроці інтегрування  $k$  матимуть вигляд

$$\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k = \mathbf{b}_k, \quad (6)$$

де  $\mathbf{u}_k = (u_{0,k}, u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{n,k})_t$ .

З урахуванням особливостей матриці коефіцієнтів  $\mathbf{A}_k$ , яка є стрічково-діагональною, для розв'язування рівняння (5) ми застосували модифікований метод Гаусса, у якому операції виконують лише над ненульовими елементами матриці.

На підставі розробленої математичної моделі реалізовано цифрову модель, на якій проведено математичні експерименти. Окремі результати з них показано на рис. 5.

Отже, порівняння форми та параметрів проведення збудження на окремих ділянках провідної системи серця, отриманих на цифровій моделі з експериментальними даними, дає підстави стверджувати про адекватність запропонованої математичної моделі.

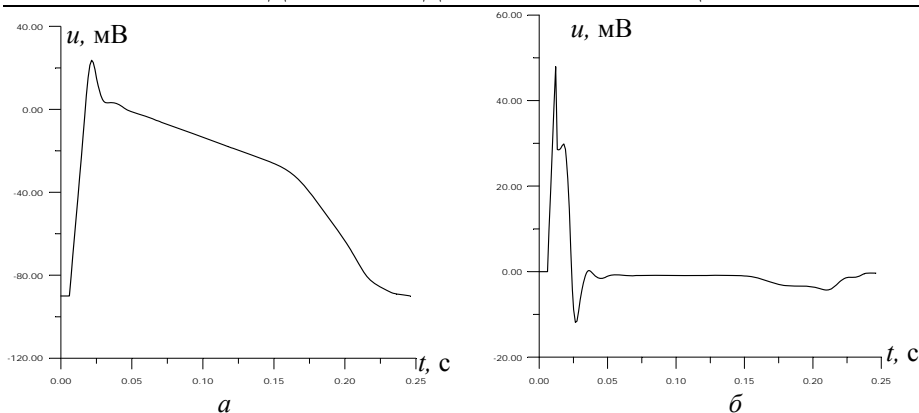


Рис. 5. Мембранний потенціал “швидкого” кардіоміоцита (а) та напруга на його поверхні (б) під час проведення збудження.

Розроблену математичну модель провідної системи серця можна використати для моделювання електрофізіологічних процесів у серці під час отримання електрокардіограми.

1. Ганонг В. Фізіологія людини / Пер. з англ. Львів: БаК, 2002. 784 с.
2. Горячко В. Математична модель поширення нервового імпульсу в нейроні // Теор. електротехніка. 2005. Вип. 58. С. 20–26.
3. Тасаки И. Нервное возбуждение. М.: Мир, 1971. 222 с.
4. Hodgkin A., Huxley A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. J. Physiol. 1952. Vol. 117. P. 500–544.

## MATHEMATICAL MODEL OF HUMAN HEART CONDUCTIVE SYSTEM

**V. Horyachko, T. Horyachko\***

*Lviv Polytechnic National University,  
Bandera Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine*

*\*Ivan Franko Lviv National University,  
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

Mathematical model of human heart conductive system as parametric electric circuit with distributed parameters is proposed. Lineal parameters of such a circuit were obtained on the basis of geometric dimensions, physical characteristics of the medium and approximated experimental curves of ion conductivity of a membrane.

*Key words:* mathematical model, heart, electrical circuits with distributed parameters.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2006  
Прийнята до друку 10.06.2007