

УДК 621.372.061

## ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ СИГНАЛУ З ШУМАМИ

Ю. Мочульський

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна  
mochulsky@ukr.net*

Наведено результати експериментального вимірювання фрактальної розмірності зашумлених цифрових сигналів різної форми. З'ясовано, що за достатньо малого співвідношення сигнал/шум криві для визначення фрактальної розмірності не залежать від форми сигналу і його значення, а визначені лише потужністю шуму. Наведено приклад оцінки потужності шуму в сигналі на підставі вимірювання параметрів кривих для визначення фрактальної розмірності.

*Ключові слова:* фрактал, фрактальна розмірність, цифрові сигнали, шум, оцінка потужності шуму.

Останнім часом багато уваги в літературі приділяють фракталам та фрактальній розмірності. Ці поняття почали використовувати в механіці [1], геології, радіофізиці [2] та інших галузях науки і техніки. Ми зробили спробу використати поняття фрактальної розмірності для вимірювання потужності шуму в сигналах, заданих у цифровому вигляді. Сьогодні часто отримані під час досліджень сигнали оцифровують і опрацьовують у цифровій формі.

Наведемо головні поняття про фрактали та фрактальну розмірність. Термін "фрактал" уведений 1975 р. Б. Мандельбротом. Він означає безмежно самоподібну геометричну фігуру. Для прикладу розглянемо фрактал – криву Коха (рис. 1). Її будують так. Деякий відрізок розбивають на три однакові частини і середню замішують двома відрізками такої самої довжини, як показано на рис. 1. Після цього повторюють таку процедуру з кожним новим відрізком безмежну кількість разів. Отриману внаслідок такої процедури криву називають кривою Коха. Можна довести, що геометрична довжина цього криволінійного відрізка безмежно велика.

Перейдемо до фрактальної розмірності. В геометрії Евкліда розмірність відрізка – одиниця, квадрата – два, а куба – три. Це поняття розмірності можна пояснити так. Візьмемо деякий відрізок завдовжки, наприклад, 8 см. Якщо міряти його довжину еталонним відрізком довжиною  $\delta = 2$  см, то таких відрізків вкладається  $N = 4$ . Однак якщо взяти відрізок довжиною  $\delta = 4$  см, то таких відрізків вкладається  $N = 2$ . При  $\delta = 1$  см отримаємо  $N = 8$ . Тобто число  $N$  є функцією від  $\delta$  і  $N(\delta) \cdot \delta = 8$  см. Якщо пронормувати довжину, взявши за одиницю 8 см, то отримаємо залежність

$$N(\delta) \cdot \delta = 1. \quad (1)$$

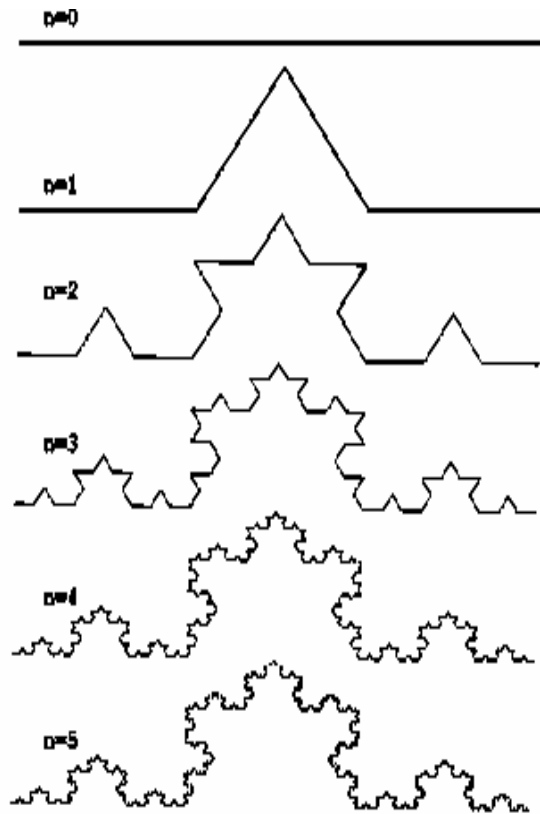


Рис. 1. Побудова кривої Коха

Аналогічну операцію можна провести і з квадратом, вимірюючи його площу еталонними квадратами з довжиною ребра  $\delta$ . В цьому випадку для безрозмірних нормованих величин

$$N(\delta) \cdot \delta^2 = 1. \quad (2)$$

Якщо провести таку операцію з кубом, то

$$N(\delta) \cdot \delta^3 = 1. \quad (3)$$

З таких міркувань можна записати загальний вираз  $N(\delta) \cdot \delta^d = 1$ , де  $d$  – розмірність об'єкта. З цієї формули випливає вираз для розмірності

$$d = \frac{\log(N(\delta))}{\log(1/\delta)}. \quad (4)$$

Оскільки в формулі є відношення логарифмів, то основу логарифма можна брати довільною, але однаковою для чисельника і знаменника.

Визначимо розмірність кривої Коха. Якщо вибрати довжину еталонного відрізка  $\delta = 1/3$  довжини початкового відрізка, то, як видно з принципу побудови кривої Коха,  $N = 4$ . При  $\delta = 1/9$  довжини початкового відрізка  $N = 16$  і т.д. Вико-

ростаємо формулу для розмірності й отримаємо приблизно  $d = 1,262$ , тобто розмірність кривої Коха не є цілим числом. Так само можна довести, що розмірність інших фракталів не є цілим числом.

Крива Коха належить до точних, або детерміністичних, фракталів. Крім таких фракталів, є випадкові, або не детерміністичні, фрактали, у яких не зберігається точне повторення. Наприклад, маленькі гілки дерева побудовані майже так само, як і великі, які, відповідно, повторюють будову дерева загалом. Аналогічно, якщо розглядати берегову лінію з великої висоти, а потім зі значно меншої, то можна побачити приблизно подібні криві.

У недетерміністичних кривих відношення  $\log(N(\delta))$  до  $\log(1/\delta)$  не є сталим, а дещо змінюється. Тому для знаходження фрактальної розмірності таких фракталів зручно побудувати графік залежності  $\log(N(\delta))$  від  $\log(1/\delta)$ , отриманої експериментально. У разі лінійної апроксимації цієї залежності коефіцієнт нахилу прямої дасть приблизне значення фрактальної розмірності. За описаною вище методикою визначили розмірність берегової лінії Великої Британії, отримали  $d \approx 1,3$  [3].

Крім визначення довжини криволінійного відрізка в одиницях еталонного відрізка, використовують вимірювання довжини в одиницях клітин, які покривають задану криву.

На підставі наведених вище міркувань щодо вимірювання фрактальної розмірності та з урахуванням того, що сигнал із шумом дещо нагадує берегову лінію, зроблено спробу визначити фрактальну розмірність зашумлених сигналів. Для цього вибрали п'ять тестових цифрових сигналів: синусоїдальний сигнал, меандр, пілкоподібний сигнал, трикутний сигнал і суму двох гармонічних сигналів. Період повторення кожного сигналу – 1 мс, кількість відліків на періоді – 1024. Під час досліджень змінювали амплітуду сигналів і потужність (дисперсію) шуму.

Як зазначено вище, для визначення фрактальної розмірності побудували графіки залежності логарифма кількості еталонних відрізків, які вкладаються на довжині сигналу, від логарифма величини, оберненої до довжини еталонного відрізка. На рис. 2 ця залежність показана для всіх наведених вище типів сигналів де амплітуди сигналу 0,5 мВ і потужності (дисперсії) шуму 1 мкВт. Виявилось, що ця залежність далека від лінійної, але дуже мало залежить від форми сигналу.

Як бачимо, усі п'ять кривих дуже близькі між собою. Для порівняння на рис. 3 зображена залежність для цього ж сигналу, але за потужності шуму 0,001 мкВт.

З рис. 3 видно, що і за такого шуму всі криві теж майже збігаються, однак починаються вони не з 6,6, а приблизно з 2.

Аналогічні порівняння, зроблені за амплітуди сигналу 10 мВ, відображають незначні розходження кривих лише за малих шумів.

На рис. 4 показана залежність для синусоїдального сигналу з амплітудою 1 В для різних рівнів шуму.

Аналіз рисунків наводить на таку думку: чи не можна використати параметри цієї залежності для оцінки потужності шуму. Для початку ці залежності апроксимували лінійно –  $\log(N) = K \log(1/\delta) + B$ .

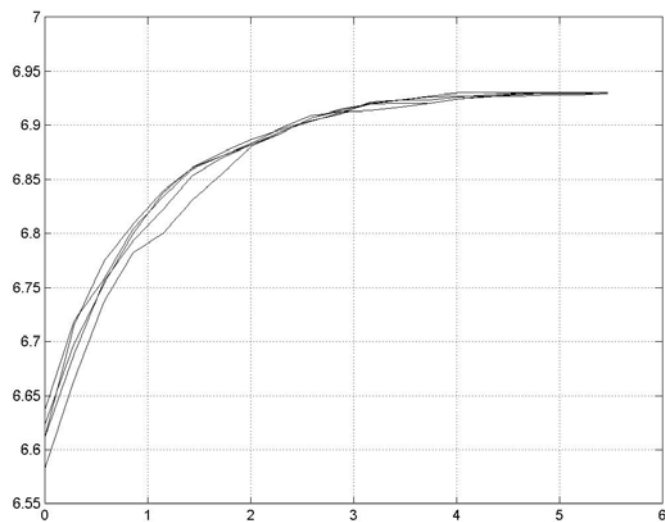


Рис. 2. Залежність  $\log(N)$  від  $\log(I/\delta)$  за амплітуди сигналів 0,5 мВ і потужності шуму 1 мкВт.

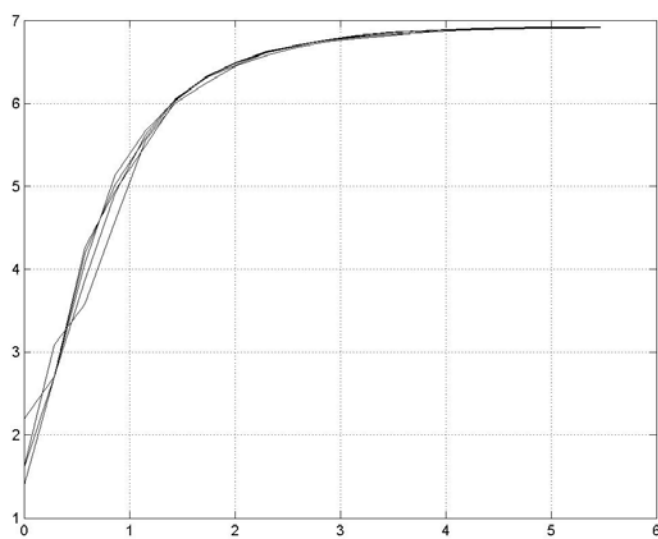


Рис. 3. Залежність  $\log(N)$  від  $\log(I/\delta)$  за амплітуди сигналів 0,5 мВ і потужності шуму 0,001 мкВт.

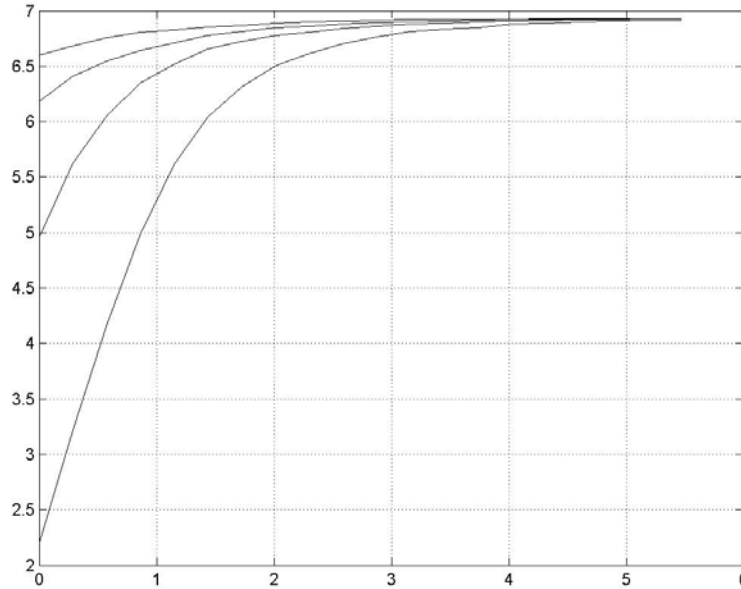


Рис. 4. Залежність  $\log(N)$  від  $\log(1/\delta)$  для синусоїдального сигналу з амплітудою 1 мВ і потужностями шуму 1,0–0,001 мкВт.

Досліджено залежність параметрів  $K$  і  $B$  від потужності шуму для різних типів і амплітуд сигналів: 0,5, 1,0, 3,16 і 10,0 мВ. У табл. 1 і 2 наведено цю залежність за амплітуди сигналу 0,5 мВ. Останній стовпець таблиць відображає середнє арифметичне відхилення параметрів  $K$  і  $B$  для різних типів сигналів від їхнього середнього значення.

Таблиця 1. Залежність  $K$  від типу сигналу і потужності шуму  $n$  за амплітуди сигналу 0,5 мВ

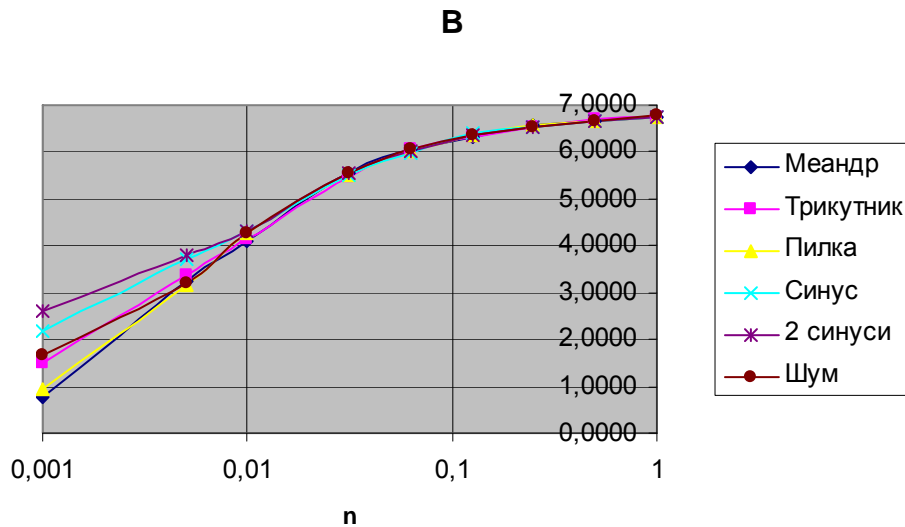
Потужність шуму, $n$	Тип сигналу						Відхилення $D$ , %
	Меандр	Трикутник	Пилка	Синус	Два синуси	Шум	
1	0,0497	0,0408	0,0410	0,0429	0,0443	0,0389	5,9
0,5	0,0640	0,0621	0,0640	0,0652	0,0649	0,0620	1,2
0,25	0,0863	0,0912	0,0899	0,0955	0,0887	0,0964	2,6
0,125	0,1440	0,1583	0,1485	0,1313	0,1445	0,1405	4,4
0,062	0,2014	0,2368	0,2199	0,2071	0,2188	0,2109	4,6
0,031	0,3558	0,3521	0,3773	0,3320	0,3470	0,3410	3,1
0,01	0,7042	0,6991	0,7210	0,7110	0,6663	0,6467	2,0
0,005	0,8545	0,8634	0,9117	0,8636	0,8019	0,9017	2,8
0,001	1,2093	1,0992	1,1969	1,0938	1,0332	1,2178	5,4

Таблиця 2. Залежність  $B$  від типу сигналу і потужності шуму  $n$  за амплітуди сигналу 0,5 мВ

Потужність шуму $n$	Тип сигналу						Відхилення $D$ , %
	Меандр	Трикутник	Пилка	Синус	Два синуси	Шум	
1,000	6,72	6,76	6,76	6,75	6,74	6,77	0,2
0,500	6,69	6,67	6,66	6,66	6,66	6,67	0,1
0,250	6,58	6,55	6,56	6,54	6,57	6,53	0,2
0,125	6,34	6,28	6,32	6,39	6,33	6,35	0,4
0,063	6,10	5,97	6,02	6,08	6,03	6,07	0,7
0,031	5,49	5,50	5,40	5,58	5,52	5,55	0,7
0,010	4,06	4,08	3,98	4,04	4,22	4,27	1,4
0,005	3,39	3,36	3,18	3,36	3,60	3,21	2,8
0,001	1,67	2,10	1,70	2,12	2,37	1,65	12,3

Аналіз табл. 1,2 засвідчує, що менший розкид має параметр  $B$ . На рис. 5 показано залежність параметра  $B$  від потужності шуму для різних типів сигналу за амплітуди сигналів 1 мВ.

Як видно з рис. 5, зі зменшенням потужності шуму збільшується розкид кривих. Це зрозуміло, бо без шуму вигляд кривої залежить від типу сигналу. Очевидно, що усереднене за типом сигналів значення цього параметра можна взяти для оцінки потужності шуму.

Рис. 5. Залежність параметра  $B$  від потужності шуму для різних типів сигналу.

Якщо потужність шуму для амплітуди сигналу до 3,5 мВ не менше 0,03125 мкВт, а для амплітуди до 15 мВ перевищує 0,0625 мкВт, то значення параметра  $B$  відхилитиметься від його усередненого значення не більше, ніж на 1%,

за будь-якого типу вибраних для дослідження сигналів. Відповідно, відхилення до 10% буде за потужності шуму не менше 0,005 мкВт для амплітуди до 1 мВ і 0,01 мкВт для 10 мВ.

Отже, параметр  $B$  майже не залежить від типу сигналу. Тепер проаналізуємо залежність його від амплітуди сигналу. В табл. 3 наведені усереднені за типом сигналу значення параметра  $B$  для різних потужностей шуму й амплітуд сигналів.

Таблиця 3. Залежність  $B_{\text{ср}}$  від потужності шуму  $n$  для різних амплітуд сигналу

Потужність шуму $n$	Амплітуда сигналу, мВ				Відхилення $D, \%$
	0,5	1	3,16	10	
1,000	6,756	6,748	6,757	6,756	0,046
0,500	6,667	6,670	6,672	6,674	0,037
0,250	6,557	6,550	6,545	6,542	0,078
0,125	6,332	6,339	6,343	6,350	0,087
0,063	6,040	6,027	6,019	6,014	0,137
0,031	5,496	5,507	5,532	5,620	0,731
0,010	4,075	4,229	4,422	4,827	5,383
0,005	3,377	3,459	3,811		4,930
0,001	1,992	1,598	2,737		19,850

Як видно з табл. 3, цей параметр також майже не залежить від амплітуди сигналу. Останній стовпець табл. 3 відображає відхилення параметра  $B$  від усередненого за амплітудою значення. Бачимо, що для потужностей шуму до 0,03 мкВт відхилення не перевищує 1%, а для потужності 0,01 мкВт – близько 5%.

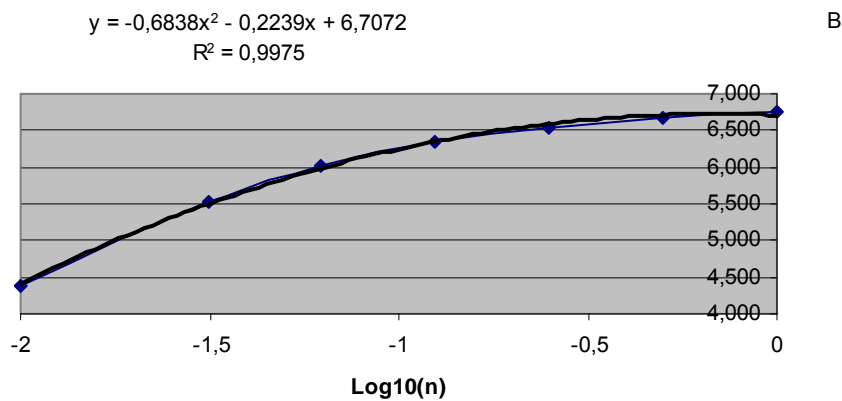


Рис. 6. Залежність параметра  $B$  від логарифма потужності шуму.

На рис. 6 показано залежність усередненого за типом сигналу й амплітудою параметра  $B$  від десяткового логарифма потужності шуму. Ця залежність апроксимована поліномом другого степеня, зображеним на рис. 6. Похибка апроксимації не перевищує 1%.

На підставі апроксимувального полінома на рис. 7-9 зображено графіки залежності потужності шуму для різних діапазонів параметра  $B$ .

Отже, можна запропонувати такий алгоритм оцінки потужності шуму в цифровому сигналі за достатньо великого співвідношення сигнал/шум. Визначаємо таблично залежність  $\log(N)$  від  $\log(1/\delta)$  і лінійно апроксимуємо її; отримавши параметр  $B$ , з показаних на рис. 7-9 графіків визначаємо потужність шуму.

Для тестування цього способу використано три імпульси Гауса з амплітудою 1 мВ і потужностями шуму 0,4, 0,08 і 0,02 мкВт. Унаслідок апроксимування залежності  $\log(N)$  від  $\log(1/\delta)$ , отримали, відповідно, значення параметра  $B$  – 6,64, 6,13 і 5,00. З використанням згаданих вище графіків, отримали, відповідно, потужності шуму 0,32, 0,08 і 0,018 мкВт.

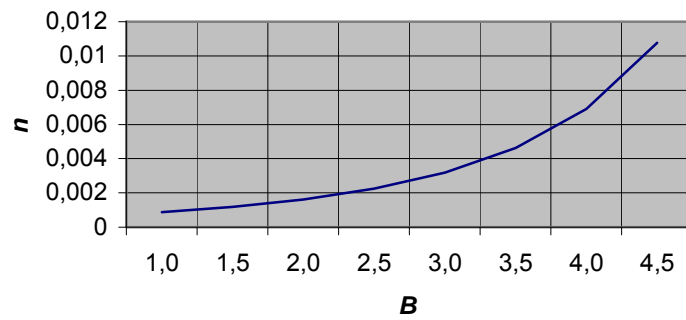


Рис. 7. Залежність потужності шуму від параметра  $B$  в діапазоні від 1 до 4,5.

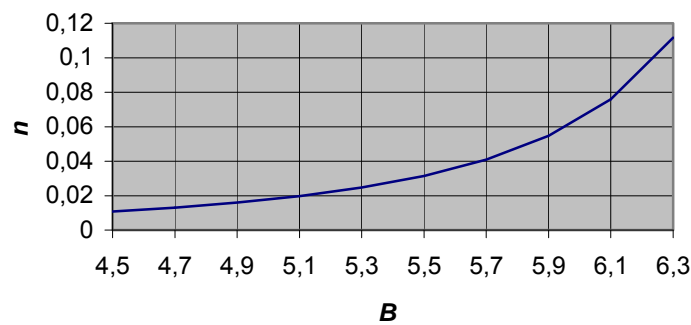


Рис. 8. Залежність потужності шуму від параметра  $B$  в діапазоні від 4,5 до 6,3.



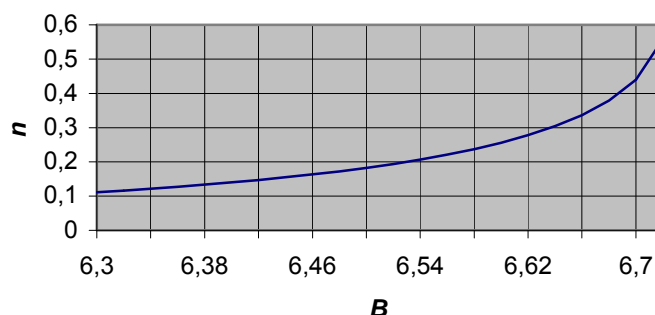


Рис. 9. Залежність потужності шуму від параметра  $B$  в діапазоні від 6,3 до 6,7.

Очевидно, що значення потужності шуму можна оцінити і без використання графіків, а використати корені показаного на рис. 6 полінома, тобто

$$n = 10^{-0,1637 - \sqrt{0,0268 + 9,8087 - B/0,6838}} \quad (5)$$

У цьому разі для наведеного вище прикладу отримаємо, відповідно, потужності шуму 0,303, 0,080 і 0,018 мкВт, що збігається з отриманими із графіка результатами.

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
2. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Университетская книга, 2005. С. 15-18.
3. <http://www.edu.ioffe.ru/register/?doc=physica3/fractal.tex>

### ФРАКТАЛЬНІ РОЗМІРНІСТІ СИГНАЛІВ З ШУМом

**Y. Mochulsky**

*Ivan Franko National University of Lviv  
Tarnavsky Str. 107, UA-79017 Lviv, Ukraine  
mochulsky@ukr.net*

Results of experiment measurement fractal's dimensions different forms digital signals with noise is view. If signal/noise ratio is enough small, the curves for measurement fractal's dimensions independent from signal's form and magnitude, but depended from noise power. The example of measurement noise power from curve for measurement fractal's dimensions is write.

*Key words:* fractal, fractal's dimension, digital signals, noise, measurement of power noise.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.2007

Прийнята до друку 30.06.2007