УДК 621.3.01

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЧАСТОТИ В АНАЛІЗІ УСТАЛЕНИХ ПРОЦЕСІВ

В. Чабан

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна
vtchaban@polynet/lviv//ua

З'ясовано, що під час розв'язання двоточкової крайової задачі для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь стану електричної системи у тих випадках, коли частина змінних має невідомий період, можна використати метод зведення їх за частотою до частини змінних з відомим періодом. Матриця монодромії системи знайдена за варіаційними рівняннями додаткової моделі чутливості до початкових умов. Метод призначений для аналізу усталених процесів складних електротехнічних систем. Додано результати комп'ютерної симуляції.

Ключові слова: електрична система, усталені процеси, додаткова модель чутливості до початкових умов, зведення за частотою.

Задача аналізу усталених процесів електричних, магнетних, електромагнетних кіл та інших електротехнічних систем у переважній більшості випадків зводиться до розв'язання двоточкової крайової задачі для диференціальних рівнянь стану, які запишемо у векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,t), \tag{1}$$

причому $f_1(x,t)$ – T – періодична, $x = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$.

Уважаємо, що існує періодичний розв'язок рівняння (1) з періодом T

$$x(t) = x(t+T). \tag{2}$$

Вирази (1), (2) і становлять двоточкову T-періодичну крайову задачу для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь стану.

Існують такі початкові умови $x(0)$, які в разі інтегрування (1) на інтервалі часу від 0 до T дають змогу ввійти безпосередньо в періодичний розв'язок, обминаючи перехідну реакцію. Такі початкові умови розглядають як аргумент рівняння періодичності (2), яке під цим кутом бачення запишемо як

$$f(x(0)) = x(0) - x(x(0), T) = 0. \tag{3}$$

Розв'язання нелінійного трансцендентного рівняння (3) методом простої ітерації тотожне безпосередньому інтегруванню (1) аж до досягнення періодичного розв'язку, що неприйнятно не тільки через обсяг обчислень, а й перш за все із-за непомірного накопичення похибок числового інтегрування, особливо в разі тривалих перехідних процесів. Тому тут застосуємо ітераційні методи вищого порядку – ітераційну формулу Ньютона [3]

$$x(0)^{(s+1)} = x(0)^{(s)} - f'\left(x(0)^{(s)}\right)^{-1} f\left(x(0)^{(s)}\right). \quad (4)$$

Матрицю Якобі $f'\left(x(0)\right)$ отримуємо диференціюванням за $x(0)$ цільової функції (3):

$$f'\left(x(0)\right) = E - \Phi(T), \quad (5)$$

де

$$\Phi(\grave{O}) = \left.\frac{\partial x\left(x(0),t\right)}{\partial x(0)}\right|_{t=T}. \quad (6)$$

Матрицю (6) називають фундаментальною матрицею, або матрицею монодромії. У технічній літературі за нею закріпилася назва матриці переходу станів.

Визначення матриці монодромії – головна складність аналізу. Найпростіший спосіб полягає у знаходженні її числовим диференціюванням. Проте відомий набагато ефективніший метод, який приводить до варіаційних рівнянь. Їх отримують диференціюванням (1) за $x(0)$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Phi, \quad (7)$$

де $\Phi = \partial x / \partial x(0)$ – матриця (6).

На s-й ітерації формули Ньютона (4) лінійне варіаційне рівняння (7) підлягає сумісному інтегруванню з нелінійним (1) на часовому інтервалі $[0,T]$. У результаті знаходимо цільову функцію (3) і потрібну матрицю Якобі (5), (6), що цілком визначає праву частину ітераційної формули (4), а відтак і її шукану ліву частину $x(0)^{(s+1)}$. Процес ітерації закінчується в разі досягнення заданої точності входження в періодичний розв'язок

$$\left|f\left(x(0)^{(s)}\right)\right| \le \varepsilon, \quad (8)$$

де ε – вектор заданих точностей.

Матриця монодромії Φ (6) є, по суті, матрицею чутливостей до початкових умов. Кожний її рядок можна розглядати як градієнт певної змінної у просторі початкових умов, а кожен її стовпець характеризує чутливість усієї множини змінних до однієї й тієї ж початкової умови. Тому диференціальне рівняння (7) можна розглядати як модель чутливості до початкових умов.

Значення $x(0)^{(0)}$ як нульове наближення формули Ньютона і початкова умова для (1) задано довільним. Однак коли у розв'язку можливе існування декількох періодичних станів, $x(0)^{(0)}$ визначає вхід процесу в зону притягання одного з них. Тому, щоб отримати сукупність усіх можливих періодичних розв'язків, необхідно варіювати ним.

З (3), (6) початкове значення $\Phi(0)^{(s)}$, у тому числі й $\Phi(0)^{(0)}$, таке:

$$\Phi(0)^{(s)} = E . \quad (9)$$

Якщо в системі (1) існують неголономні зв'язки, які безпосередньо інтегруються, то їх треба проінтегрувати аналітично й знизити порядок системи рівнянь на кількість таких зв'язків, про це зазначив ще А. Пуанкаре, інакше матриця $f^{'}(x(0))$ буде особливою й не дасть змоги скористатися нею на наступному етапі алгоритму.

Головна трудність аналізу – це обчислення матриці Якобі $\partial f(x,t)/\partial x$ вихідної системи нелінійних диференціальних рівнянь (1). Ця перешкода суттєво стримувала застосування методу в системах з багатополюсними елементами, а правильніше – тримала його за полем зору дослідників, доки ми не запропонували метод побудови допоміжної моделі чутливості до початкових умов. Суть методу зводиться до того, щоб матрицю монодромії записати у вигляді добутку двох інших матриць:

$$\Phi = A \cdot S , \quad (10)$$

де $A = A(x,T)$ – матриця-співмножник коефіцієнтів системи нелінійних диференціальних рівнянь (1), записаних у матрично-векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t)\big(B(x,t)x + C(x,t)\big), \quad (11)$$

а S – матриця допоміжних моделей чутливості до початкових умов

$$S = \left. \frac{\partial y(x(0),t)}{\partial x(0)} \right|_{t=T} \quad (12)$$

деякого допоміжного диференціального рівняння, записаного стосовно $y = y(x)$,

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x,t), \quad (13)$$

що значно простіше від (1) і описує той самий процес, хіба що в допоміжному сенсі й саме по собі не має розв'язку. Побудова такого рівняння, як свідчить особистий досвід автора, в переважній більшості практичних задач нескладна.

Заміну *x* на *y* треба виконувати так, щоб структура рівняння (13) була простішою від структури рівняння (1). У загальному вигляді її можна записати як

$$y = G^{'}x + H , \quad (14)$$

де $G^{'} = G^{'}(x)$ – матриця статичних параметрів; $H = H(t)$ – деякий вектор.

Наприклад, у диференціальних рівняннях електричного кола струми котушок індуктивностей і напруги конденсаторів ми розглядаємо як компоненти вектора *x*, а їхні потокозчеплення і ладунки – як компоненти вектора *y*. У диференціальних рівняннях руху координати та швидкості розглядаємо як компоненти вектора *x*, а узагальнені імпульси – як компоненти вектора *y* тощо. Зв'язок між *x* і *y* повинен бути відомий.

Налагодимо зв'язок між функціями $f_1(x,t)$ і $f_2(x,t)$. Для цього продиференціюємо за часом (14) і підставимо в одержаний результат похідні (1), (13):

$$f_2(x,t) = \left(G^{"} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) f_1(x,t) + \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{15}$$

де $G^{"} = G^{"}(x)$ – матриця диференціальних параметрів [2]

$$G^{"} = \frac{\partial G'}{\partial x} x + G'. \tag{16}$$

Знаходження матриць статичних параметрів G' в (14) становить порівняно просту задачу, тоді як знаходження матриць диференціальних параметрів $G^{"}$ у (15) – достатньо складну. Тож формула (16) уможливлює знаходження $G^{"}$ на підставі G' за формальними математичними діями.

Спрощення правих частин диференціального рівняння (13) порівняно з (1) досяжне в записі (11) завдяки тому, що

$$G^{"} + \frac{\partial H}{\partial x} = A^{-1}(x,t). \tag{17}$$

Оскільки $A^{-1}(x,t)A(x,t) = E$, то в (13) матриця коефіцієнтів нівельована.

Варіаційне рівняння для обчислення матриці (12) знаходимо диференціюванням за $x(0)$ рівняння (13):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial f_2(x,t)}{\partial x} AS. \tag{18}$$

Тепер на s-й ітерації формули Ньютона (4) замість (7) сумісному інтегруванню з нелінійним (1) на часовому інтервалі $[0,T]$ підлягає лінійне варіаційне рівняння (18). Початкове значення $S(0)^{(s)}$, у тому числі й $S(0)^{(0)}$, на підставі (9), (10), (17), таке:

$$S(0)^{(s)} = \left(A(0)^{(s)} \right)^{-1} = G^{"}(0)^{(s)} + \left(\frac{\partial H}{\partial x}(0) \right)^{(s)}. \tag{19}$$

Часову дискретизацію вихідних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь їхніх чутливостей до початкових умов виконують за явними або неявними методами. Особливо гармонійно поєднується їхнє сумісне розв’язування у випадку неявних методів, оскільки матриці Якобі основного рівняння і рівняння цілі збігаються [1].

Дещо складніший аналіз автономних систем. Такі системи самі по собі можуть перебувати в коливному стані без зовнішньої вхідної дії, що є функцією часу. Прикладом можуть бути механічні годинники і високочастотні генератори в радіоелектроніці тощо. Розглянутий вище алгоритм знаходження періодичного розв’язку непридатний, оскільки період T тут належить до невідомих і визначений винятково параметрами самої системи, її коефіцієнтами. Проте й цю перешкоду можна подолати, якщо невідомий період записати на місце одного з компонентів вектора x, а тому надати реально можливе певне значення. Ми таку задачу не розглядатимемо. Вона не вписується в задум цієї праці. Наша мета – складніша задача, про яку йтиметься нижче.

Нехай з множини компонентів вектора x для частини x_1 відомий період T, а для іншої x_2 він невідомий, а то й може бути виражений ірраціональним числом.

У такому разі x_2 інколи вдається звести за частотою (періодом) до частоти (періоду) x_1 на підставі внутрішньої будови пристрою [2]. Для цього запишемо (11) так:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\right). \tag{20}$$

Позначимо зведене значення як x_2'. Зведення виконуватимемо за допомогою матриці лінійних перетворень $\Pi = \Pi(t)$, як

$$x_2' = \Pi x_2; \quad x_2 = \Pi^{-1} x_2'. \tag{21}$$

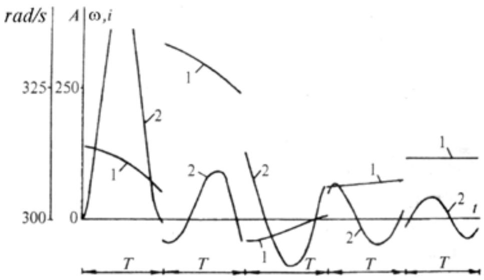
Згідно з (21), рівняння (20) набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ \Pi A_{21} & \Pi A_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} B_1 & B_{12}\Pi^{-1} \\ B_{21} & B_2\Pi^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} \\ \Pi\, d\Pi^{-1}/dt \cdot x_2' \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Якщо тепер вектор x трактувати як $x = \left(x_1, x_2'\right)$, то задача зводиться до крайової задачі (1), (2) із заданим періодом періодичного розв'язку.

Реальні змінні в разі потреби знаходимо згідно з другим виразом (21).

На рисунку показано ефективність запропонованого алгоритму пошуку періодичного розв'язку системи п'яти (n = 5) нелінійних диференціальних рівнянь електромеханічного стану асинхронного мотора. Струми статора пристрою мають відомий період, що відповідає частоті мережі, струми ротора – невідомий. Криві кутової швидкості (*1*) і струму фази статора (*2*) на чотирьох ітераціях ілюструють входження в усталений процес. П'ята ітерація – це вже власне періодичний розв'язок рівнянь стану. В алгоритмі були задіяні диференціальні рівняння (18), (22) заодно з алгебричними виразами (4)–(6), (8), (10), (19).



Значення швидкості (*1*) і струму статора (*2*) на чотирьох ітераціях, що привели до усталеного стану.

Цей приклад наведений не випадково. Подібна задача розв'язана нами вперше. Вона непосильна жодному з відомих розроблених досі числових методів розв'язування двоточкових крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь.

1. *Чабан В.* Чисельні методи. Львів, 2001. 186 с.

2. *Чабан В.* Математичне моделювання електромеханічних процесів. Львів, 1997. 344 с.
3. *Aprille T.I., Trick T.N.* A computer algorithm to determine the steady-state responce of non-linear oscilators // IEEE, Trans. Circuit Theory. 1972. Vol. CT–19. P. 354–360.

TRANSFORMATION OF FREQUENCY IN STEADY-STATE ANALYSIS

V. Tchaban

Lviv Polytechnic National University
Bandera Str., 12, Lviv, 79013, Ukraine
vtchaban@polynet.lviv.ua

In the paper is shown that by solution of two point boundary problem for ordinary non-linear differential equations of electric system state in the cases when part of variables has indefinite period, may be used the method of reduction theirs to part of variables with known period. The monodromy matrix is determined from variation equations of supplementary sensitivity model to initial conditions. The proposed method is designed for analysis of steady-state processes of complicated electric systems. The results of computation are given.

Key words: electric system, steady-state processes, supplementary sensitivity model to initial conditions, reduction to known period.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2006
Прийнята до друку 30.12.2006