

УДК 621.315.592

## ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ МОДУЛЯЦІЙНОЇ ФОТОПРОВІДНОСТІ В КВАЗІСТАЦІОНАРНОМУ НАБЛИЖЕННІ

Р. Шувар, О. Столярчук

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
кімн.212, вул. Драгоманова, 50, 79005, Львів, Україна  
e-mail: stolyarchuk@electronics.wups.lviv.ua*

Розглянуто методику числового розв'язку фундаментальної системи рівнянь під час аналізування фотопровідності у заданому квазістаціонарному режимі в лінійному наближенні за параметром модуляції. Запропоновано метод чисельного розрахунку просторового розподілу амплітуд змінних концентрацій вільних носіїв заряду та напруженості електричного поля. Запропоновано метод лінеаризації виразів для швидкості рекомбінації в наближенні часу існування. Отриману систему рівнянь розв'язано методом скінченних різниць. Досліджено оптимальний вибір виразів для апроксимації похідних, нормувальних коефіцієнтів, стійкість та збіжність різницевої схеми.

*Ключові слова:* фотопровідність, фундаментальна система рівнянь, числові методи.

Сьогодні активно розвиваються нові напрями функціональної електроніки, зокрема фотоелектроніка. Розробка приладів фотоелектроніки потребує знання таких параметрів, як час існування, коефіцієнти захоплення носіїв на рівні, концентрація рекомбінаційних рівнів і рівнів прилипання. Для дослідження цих параметрів фотопровідників широко використовують метод модуляційної фотопровідності. Модуляція може бути як зовнішня, наприклад, за інтенсивністю збуджувального світла, так і внутрішня, коли зовнішнє збудження модулює деякий параметр самого напівпровідника шляхом модуляції температури, механічної напруги або ж напруженості електричного поля в кристалі [4]. Для аналізу модуляційних спектрів фотопровідності необхідно враховувати вплив дифузійно-дрейфових процесів, що залежить від просторової неоднорідності задачі, причому неоднорідність може бути зумовлена як просторовою залежністю темпу оптичної генерації нерівноважних носіїв заряду, так і впливом поверхні або контактів [5]. Обчислення просторового розподілу концентрацій вільних носіїв заряду та напруженості електричного поля дає змогу з'ясувати залежність електричних властивостей напівпровідника від кількості та складу домішок, від температури та, наприклад, рівня фотозбудження. Ця задача зводиться до

розв'язування системи рівнянь неперервності для носіїв заряду і рівняння Пуассона (фундаментальної системи рівнянь (ФСР)) [1].

Нижче запропоновано метод числового розрахунку просторового розподілу амплітуд змінних концентрацій вільних носіїв заряду та напруженості електричного поля.

Розв'язок ФСР в загальному вигляді складний, що зумовлено нелінійністю системи рівнянь [2]. Ми пропонуємо методику числового розв'язку ФСР в лінійному наближенні за параметром модуляції. Вважають, що у заданому квазістаціонарному режимі часова залежність змінної складової концентрації носіїв заряду та напруженості електричного поля визначені часовою залежністю параметра модуляції. Розв'язок ФСР шукатимемо методом комплексних амплітуд у вигляді

$$n\{p, N_r, P_r, E, N_t\} = n_s\{p_s, N_{rs}, P_{rs}, E_s, N_{ts}\} + \Delta n e^{i\omega t} \{p, N_r, P_r, E, N_t\}. \quad (1)$$

Як звичайно, під час при експериментальних досліджень виконується умова малості параметра модуляції, тому

$$|\Delta n\{p, N_r, P_r, E, N_t\}| \ll n_s\{p_s, N_{rs}, P_{rs}, E_s, N_{ts}\}. \quad (2)$$

Обмежимося надалі випадком одновимірної задачі, вважаючи, що просторова неоднорідність зумовлена зміною темпу оптичної генерації носіїв заряду по об'єму напівпровідника вздовж осі  $x$  перпендикулярно до напрямку протікання струму. Розглянемо випадок зовнішньої модуляції за інтенсивністю збуджувального світла. Темп оптичної генерації запишемо у вигляді:  $g = g_0 e^{-\alpha x} + \Delta g e^{-\alpha x} e^{-i\omega t}$ , де  $\alpha$  - коефіцієнт поглинання світла. Впливом контактів знехтуємо.

У цих припущеннях для визначення просторової залежності комплексних амплітуд  $\Delta n, \Delta p, \Delta E, \Delta N_r, \Delta P_r, \Delta N_t$  отримаємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} D_n \frac{d^2 \Delta n}{dx^2} + \mu_n \Delta E \frac{dn_s}{dx} + \mu_n E_s \frac{d \Delta n}{dx} + \mu_n \frac{d \Delta E}{dx} n_s + \mu_n \frac{d E_s}{dx} \Delta n - R_n - R_t + \\ + \Delta g e^{-\alpha x} = i\omega \Delta n; \\ D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \mu_p \Delta E \frac{dp_s}{dx} - \mu_p E_s \frac{d \Delta p}{dx} - \mu_p \frac{d \Delta E}{dx} p_s - \mu_p \frac{d E_s}{dx} \Delta p - R_p + \Delta g e^{-\alpha x} = \\ = i\omega \Delta p; \\ \frac{d \Delta E}{dx} = -\frac{e}{\epsilon_0} (\Delta n + \Delta N_r - \Delta p); \\ R_n - R_p = i\omega \Delta N_r; \\ R_t = i\omega \Delta N_t. \end{array} \right. \quad (3)$$

Швидкості рекомбінації нерівноважних носіїв запишемо відповідно до моделі Шоклі - Ріда, вважаючи, що рекомбінація нерівноважних електронів і дірок

відбувається через один тип рекомбінаційних центрів з концентрацією  $M_r$  і глибиною залягання  $\epsilon_r$  відносно дна зони провідності та один тип центрів прилипання з концентрацією  $M_t$  і глибиною залягання  $\epsilon_t$ :

$$R_n = C_{nr}P_{rs}\Delta n - C_{nr}(n_s + n_{1s})\Delta N_r, \quad (8)$$

$$R_p = C_{pr}N_{rs}\Delta p + C_{pr}(p_s + p_{1s})\Delta N_r, \quad (9)$$

$$R_t = C_{nt}P_{ts}\Delta n - C_{nt}(n_s + n_{1st})\Delta N_r, \quad (10)$$

де  $N_{rs}, P_{rs}, N_{ts}, P_{ts}$  - стаціонарні концентрації електронів та дірок, локалізованих на рекомбінаційному рівні та на рівні прилипання;  $n_{1s} = N_c \exp \frac{\epsilon_r}{kT}$ ,

$p_{1s} = N_v \exp \frac{-\epsilon_g - \epsilon_r}{kT}$ ,  $n_{1st} = N_c \exp \frac{\epsilon_t}{kT}$  - концентрації електронів і дірок, зведених до рекомбінаційного рівня та центрів прилипання;  $\epsilon_g$  - ширина забороненої зони,  $N_c, N_v$  - ефективні густини станів;  $D_n, D_p$  - коефіцієнти дифузії;  $\mu_n, \mu_p$  - коефіцієнти рухливості електронів і дірок, відповідно;  $C_{nr}, C_{pr}, C_{nt}$  - коефіцієнти захоплення електронів і дірок на рекомбінаційний рівень та рівень прилипання,  $n_0, p_0, N_{r0}, P_{r0}, N_{t0}$  - рівноважні концентрації носіїв заряду. Надалі вважатимемо, що стаціонарні значення  $n_s, p_s, E_s, N_{rs}, P_{rs}, N_{ts}$  є відомими.

Граничні умови для рівнянь неперервності запишемо в точках  $x = 0$  і  $x = L$ :

$$\left. \begin{aligned} D_n \frac{d\Delta n}{dx} + \mu_n \Delta E n_s + \mu_n E_s \Delta n &= S_n \Delta n \\ D_p \frac{d\Delta p}{dx} - \mu_p \Delta E p_s - \mu_p E_s \Delta p &= S_p \Delta p \end{aligned} \right\} \text{при } x = 0 \text{ та } x = L, \quad (11)$$

де  $S_n, S_p$  - швидкості поверхневої рекомбінації.

Гранична умова для рівняння Пуассона в разі, роли нема струму в напрямі осі запишемо виходячи з відсутності струму в напрямі осі  $x$ , така:

$$\int_0^L \left( \mu_n \Delta E n_s + \mu_n E_s \Delta n + D_n \frac{d\Delta n}{dx} + \mu_p \Delta E p_s + \mu_p E_s \Delta p - D_p \frac{d\Delta p}{dx} \right) dx = 0. \quad (12)$$

Для послідовного аналізу впливу рекомбінаційних та дифузійно-дрейфових процесів перетворимо вирази для швидкостей рекомбінації в наближенні часу існування нерівноважних носіїв. Уведемо такі позначення:

$$\begin{aligned} A_n &= C_{nr}P_{rs}; \\ B_n &= C_{nr}(n_s + n_{1s}); \\ A_p &= C_{pr}N_{rs}; \\ B_p &= C_{pr}(p_s + p_{1s}); \\ A_t &= C_{nt}P_{ts}; \\ B_t &= C_{nt}(n_s + n_{1st}). \end{aligned} \quad (13)$$

Використаємо позначення (13) і запишемо вирази (8) - (10) у вигляді

$$R_n = A_n \Delta n - B_n \Delta N_r ; \quad (14)$$

$$R_p = A_p \Delta p + B_p \Delta N_r ; \quad (15)$$

$$R_t = A_t \Delta n - B_t \Delta N_t . \quad (16)$$

З рівняння (7) виразимо  $\Delta N_t$  через  $\Delta n$  :

$$\Delta N_r = \frac{A_n \Delta n - A_p \Delta p}{B_n + B_p + i\omega} . \quad (17)$$

З рівняння (6) виразимо  $\Delta N_r$  через  $\Delta n$  і  $\Delta p$  :

$$R_n - R_p = A_n \Delta n - B_n \Delta N_r - A_p \Delta p - B_p \Delta N_r = i\omega \Delta N_r .$$

Отримаємо

$$\Delta N_r = \frac{A_n \Delta n - A_p \Delta p}{B_n + B_p + i\omega} . \quad (18)$$

Підставимо (17), (18) у рівняння Пуассона (5):

$$\frac{d\Delta E}{dx} = -\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0} \left( \Delta n \left( \frac{(B_n + B_p + i\omega) \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right) + A_n}{B_n + B_p + i\omega} \right) - \Delta p \left( \frac{A_p + B_n + B_p + i\omega}{B_n + B_p + i\omega} \right) \right) . \quad (19)$$

Виразимо з (19) почергово  $\Delta n$  через  $\Delta p$  та  $\Delta p$  через  $\Delta n$  :

$$\begin{aligned} \Delta n = & -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{e} \frac{B_n + B_p + i\omega}{A_n + (B_n + B_p + i\omega) \left( \frac{A_t}{B_t + i\omega} + 1 \right)} \frac{d\Delta E}{dx} + \\ & + \frac{A_p + B_n + B_p + i\omega}{A_n + (B_n + B_p + i\omega) \left( \frac{A_t}{B_t + i\omega} + 1 \right)} \Delta p ; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta p = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{e} \frac{B_n + B_p + i\omega}{A_p + B_n + B_p + i\omega} \frac{d\Delta E}{dx} + \frac{A_n + (B_n + B_p + i\omega) \left( \frac{A_t}{B_t + i\omega} + 1 \right)}{A_p + B_n + B_p + i\omega} \Delta n . \quad (21)$$

Підставимо вирази (20) і (21) у (15) і (14), відповідно. Отримаємо вирази для швидкості рекомбінації нерівноважних електронів і дірок:

$$R_n = \frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{e} \frac{B_n A_p}{B_n + B_p + A_p + i\omega} \frac{d\Delta E}{dx} , \quad (22)$$

де  $\tau_n = \frac{B_n + B_p + A_p + i\omega}{A_n A_p + A_n (B_p + i\omega) + A_p B_n \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right)}$  - нестационарний частотно

залежний час існування електронів;

$$R_p = \frac{\Delta p}{\tau_n} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \frac{B_p A_n}{A_n + (B_n + B_p + i\omega)} \frac{d\Delta E}{dx} \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right), \quad (23)$$

$$\text{де } \tau_p = \frac{(B_n + B_p + i\omega) \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right) + A_n}{A_p A_n + A_n B_p + A_p A_n + A_p (B_p + i\omega) \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right)} - \text{ нестационарний}$$

частотно залежний час існування дірок.

Вирази (22), (23), отримані в наближенні часу існування носіїв заряду, дають змогу зіставити пораховані значення часів існування з відомими експериментальними даними і також явно описати вплив зміни електричного поля та спростити рівняння, вилучивши змінні  $\Delta N_r$  і  $\Delta N_t$ .

Після всіх перетворень ми отримали систему рівнянь для визначення комплексних амплітуд  $\Delta n, \Delta p, \Delta E$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_n \frac{d^2 \Delta n}{dx^2} + \mu_n \Delta E \frac{dn_s}{dx} + \mu_n E_s \frac{d\Delta n}{dx} + \mu_n \frac{d\Delta E}{dx} n_s + \mu_n \frac{dE_s}{dx} \Delta n - \frac{\Delta n}{\tau_n} - \frac{B_n A_p}{A_p + B_n + B_p + i\omega} \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \frac{d\Delta E}{dx} + \\ + \Delta g e^{-\alpha x} = i\omega \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right) \Delta n; \\ D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \mu_p \Delta E \frac{dp_s}{dx} - \mu_p E_s \frac{d\Delta p}{dx} - \mu_p \frac{d\Delta E}{dx} p_s - \mu_p \frac{dE_s}{dx} \Delta p - \frac{\Delta p}{\tau_p} + \\ + \frac{B_p A_n}{A_n + (B_n + B_p + i\omega)} \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \frac{d\Delta E}{dx} + \Delta g e^{-\alpha x} = i\omega \Delta p; \\ \frac{d\Delta E}{dx} = - \frac{e}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{(B_n + B_p + i\omega) \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right) + A_n}{B_n + B_p + i\omega} \Delta n + \frac{e}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{A_p + B_n + B_p + i\omega}{B_n + B_p + i\omega} \Delta p. \end{array} \right. \quad (24)$$

Оскільки  $\Delta n, \Delta p$  можуть змінюватись на порядки, то для поліпшення збіжності й стійкості числового розв'язку виконаємо нормування змінних, увівши безрозмірні концентрації  $y^{(n)}, y^{(p)}$  і напруженість поля  $y^{(e)}$ :

$$\Delta n = (\Delta n)_0 y^{(n)}; \quad \Delta p = (\Delta p)_0 y^{(p)}; \quad \Delta E = (\Delta E)_0 y^{(e)}. \quad (25)$$

Введемо безрозмірну просторову координату, пронормувавши  $x$  на довжину зразка  $L$ .

Отримана система рівнянь неперервності для електронів і дірок є системою диференціальних лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами з граничними умовами. Для її розв'язування використаємо різницевий метод [3]. Розіб'ємо відрізок  $[0,1]$  зі сталим кроком  $h$  на  $N$  відрізків. Отримаємо  $N+1$  вузол  $x_i$ . У кожному вузлі заміномо точні значення функцій  $y^{(n)}(x_i), y^{(p)}(x_i), y^{(e)}(x_i)$  їхніми наближеними значеннями  $y_i^{(n)}, y_i^{(p)}, y_i^{(e)}$ , а похідні – відповідними різницеви

апроксимаціями. В кожному вузлі  $0 \dots N$  запишемо різниці рівняння неперервності для  $y^{(n)}$  та  $y^{(p)}$ . Рівняння Пуассона запишемо в вузлах  $1 \dots N$ , а граничну умову для поля апроксимуємо квадратурною формулою. Як засвідчили розрахунки, різниці схеми є стійкими, коли апроксимацію похідних за змінними  $y^{(n)}, y^{(p)}$  виконують центрально-різницевою апроксимацією, а похідних за змінною  $y^{(e)}$  - правими або лівими різницями.

Для знаходження значень  $y_i^{(n)}, y_i^{(p)}, y_i^{(e)}$  де  $i = 0 \dots N$  отримаємо систему різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} k_{n1}y_{i-1}^{(n)} - k_{n2}y_i^{(n)} + k_{n3}y_{i+1}^{(n)} - k_{n4}f_e(i) + k_{n5}y_{i-1}^{(e)} + k_{n6} &= 0; \\ k_{p1}y_{i-1}^{(n)} - k_{p2}y_i^{(n)} + k_{p3}y_{i+1}^{(n)} + k_{p4}f_e(i) - k_{p5}y_{i-1}^{(e)} + k_{p6} &= 0; \\ f_e(i) + k_{e1}y_i^{(n)} - k_{e2}y_i^{(p)} &= 0; \\ f_e(i) &= \begin{cases} 2(y_i^{(e)} - y_{i-1}^{(e)}), \text{ для } i = 1, \dots, N; \\ -3y_i^{(e)} + 4y_{i+1}^{(e)} - y_{i+2}^{(e)}, \text{ для } i = 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

де значення коефіцієнтів  $k_i$  визначені такими виразами:

$$\begin{aligned} k_{n1} &= 1 - \frac{Lh\mu_n E_s}{2D_n}; & k_{n2} &= 2 - \frac{L^2 h^2 \mu_n \frac{dE_s}{dx}}{D_n} + \frac{h^2 L^2}{D_n \tau_n} + i\omega \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right) \frac{d^2 h^2}{D_n}; \\ k_{n3} &= 1 + \frac{Lh\mu_n E_s}{2D_n}; & k_{n4} &= \frac{\mu_n n_s (\Delta E)_0 Lh}{D_n (\Delta n)_0 2} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 h L (\Delta E)_0}{e D_n (\Delta n)_0 2} \cdot \frac{B_n A_p}{B_n + B_p + A_p + i\omega}; \\ k_{n5} &= \frac{h^2 L^2 \mu_n \frac{dn_s}{dx} (\Delta E)_0}{D_n (\Delta n)_0}; & k_{n6} &= \frac{d^2 h^2}{D_n (\Delta n)_0} \Delta g \exp(-\alpha di h); & k_{p1} &= 1 + \frac{Lh\mu_p E_s}{2D_p}; \\ k_{p2} &= 2 + \frac{L^2 h^2 \mu_p \frac{dE_s}{dx}}{D_p} + \frac{h^2 L^2}{D_p \tau_p} + i\omega \frac{h^2 d^2}{D_p}; & k_{p3} &= 1 - \frac{Lh\mu_p E_s}{2D_p}; \\ k_{p4} &= \frac{\mu_p p_s (\Delta E)_0 Lh}{D_p (\Delta p)_0 2} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 h L (\Delta E)_0}{e D_p (\Delta p)_0 2} \cdot \frac{B_p A_n}{(B_n + B_p + i\omega) \left( 1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega} \right) + A_n}; \\ k_{p5} &= \frac{h^2 L^2 \mu_p \frac{dn_s}{dx} (\Delta E)_0}{D_p (\Delta p)_0}; & k_{p6} &= \frac{d^2 h^2}{D_p (\Delta p)_0} \Delta g \exp(-\alpha di h); \end{aligned}$$

$$k_{e1} = \frac{e2hL(\Delta n)_0}{\varepsilon\varepsilon_0(\Delta E)_0} \cdot \frac{(B_n + B_p + i\omega) \left(1 + \frac{A_t}{B_t + i\omega}\right) + A_n}{B_n + B_p + i\omega};$$

$$k_{e2} = \frac{e2hL(\Delta p)_0}{\varepsilon\varepsilon_0(\Delta E)_0} \cdot \frac{B_n + B_p + A_p + i\omega}{B_n + B_p + i\omega}.$$

Систему рівнянь (26) доповнимо різницевиими рівняннями, які ми отримали з граничних умов:

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} - y_{-1}^{(n)} + k_{n01}y_0^{(n)} + k_{n02}y_0^{(e)} &= 0; \\ y_{N+1}^{(n)} - y_{N-1}^{(n)} + k_{n01}y_N^{(n)} + k_{n02}y_N^{(e)} &= 0; \\ y_1^{(p)} - y_{-1}^{(p)} - kp_{01}y_0^{(p)} + kp_{02}y_0^{(e)} &= 0; \\ y_{N+1}^{(p)} - y_{N-1}^{(p)} + kp_{01}y_N^{(p)} + kp_{02}y_N^{(e)} &= 0; \\ \sum_0^N (y_{i+1}^{(n)} + y_{i-1}^{(n)}) + (ke_{01} + ke_{03}) \sum_0^N y_i^{(e)} + ke_{02} \sum_0^N y_i^{(n)} + ke_{04} \sum_0^N y_i^{(p)} - \\ - ke_{05} \sum_0^N (y_{i+1}^{(p)} + y_{i-1}^{(p)}) &= 0; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{де } k_{n01} = \frac{2Lh(\mu_n E_s - S_n)}{D_n}; \quad k_{n02} = \frac{2dL\mu_n(\Delta E)_0 n_s}{D_n(\Delta n)_0}; \quad k_{p01} = \frac{2Lh(\mu_p E_s + S_p)}{D_p};$$

$$k_{p02} = \frac{2dL\mu_p(\Delta E)_0 p_s}{D_p(\Delta p)_0}; \quad k_{e01} = \frac{\mu_n n_s(\Delta E)_0 2Lh}{D_n(\Delta n)_0}; \quad k_{e02} = \frac{\mu_n E_s 2Lh}{D_n};$$

$$k_{e03} = \frac{\mu_p p_s(\Delta E)_0 2Lh}{D_p(\Delta n)_0}; \quad k_{e04} = \frac{\mu_p E_s(\Delta p)_0 2Lh}{D_n(\Delta n)_0}; \quad k_{e05} = \frac{D_p(\Delta p)_0}{D_n(\Delta n)_0}.$$

Отже, для знаходження значень  $y_i^{(n)}, y_i^{(p)}, y_i^{(e)}$ , де  $i = 0 \dots N$ , ми отримали систему лінійних алгебричних рівнянь. Для її розв'язування використано метод Гаусса. З огляду на велику розмірність матриці системи для зменшення похибки округлення надалі виконуємо ітераційне уточнення розв'язку.

Для стійкості та збіжності розв'язку необхідно максимально порівняти коефіцієнти при змінних у рівняннях (26) та (27), що дає змогу мінімізувати похибку обчислення, пов'язану зі скінченною розмірністю ЕОМ. Це можна зробити шляхом відповідного підбору деяких вільних параметрів задачі  $(\Delta n)_0, (\Delta p)_0, (\Delta E)_0$  і кроку сітки за умови, що інші параметри для напівпровідника задані. Також у разі вибору коефіцієнтів треба намагатися, щоб діагональні елементи матриці отриманої системи рівнянь були максимальними.

Під час досліджень з'ясовано, що, на відміну від стаціонарних значень, для точності нестационарних дуже важливим є крок розбиття сітки. Верхня межа обмежена лише потужністю ЕОМ, бо під час обчислень доводиться розв'язувати систему розмірністю  $3*(N+3)$ , де  $N$  - кількість вузлів сітки. На рис. 1 показано результати числового розрахунку, отримані в разі послідовного згущення сітки. З

графіків впливає, що, починаючи з  $N = 500$  точок, розрахунки дають розв'язки з задовільною точністю. Густиша сітка дає незначне поліпшення точності, а при  $h \rightarrow 0$  розв'язок рівномірно збігається до точного з другим порядком точності.

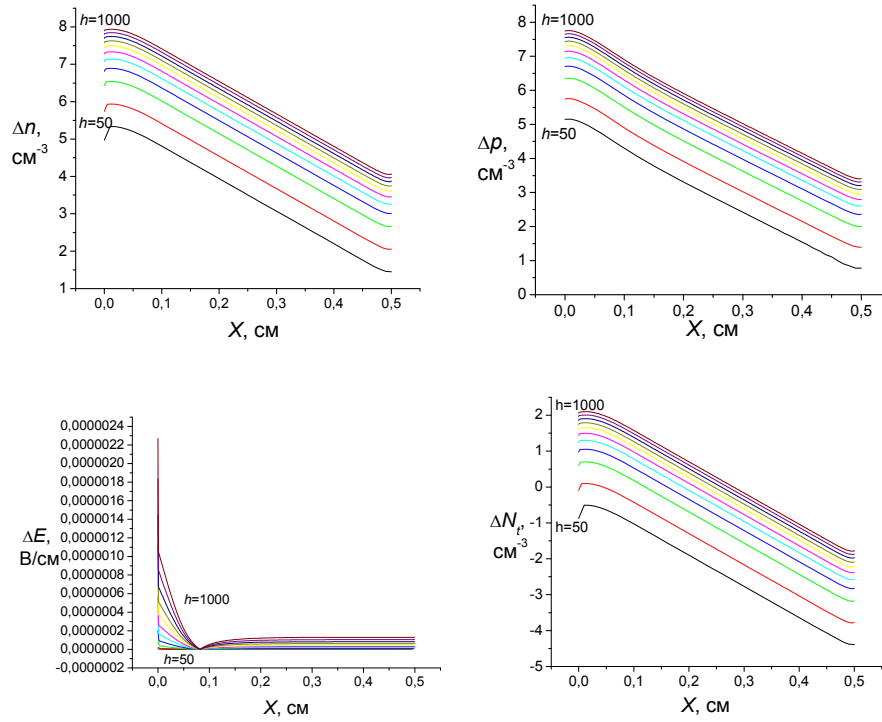


Рис. 1. Розподіл нестационарних концентрацій та електричного поля при  $\alpha = 20 \text{ см}^{-1}$ ,  $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $M_1 = 17 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$  залежно від кроку розбиття сітки в межах від 50 до 1 000 вузлів.

Для розрахунку нестационарних значень використовували стаціонарні, розраховані за методикою, описаною в статті [6]. На рис. 2 зображено розраховані графіки залежностей стаціонарних значень концентрації і напруженості електричного поля для різних значень концентрації локальних центрів.



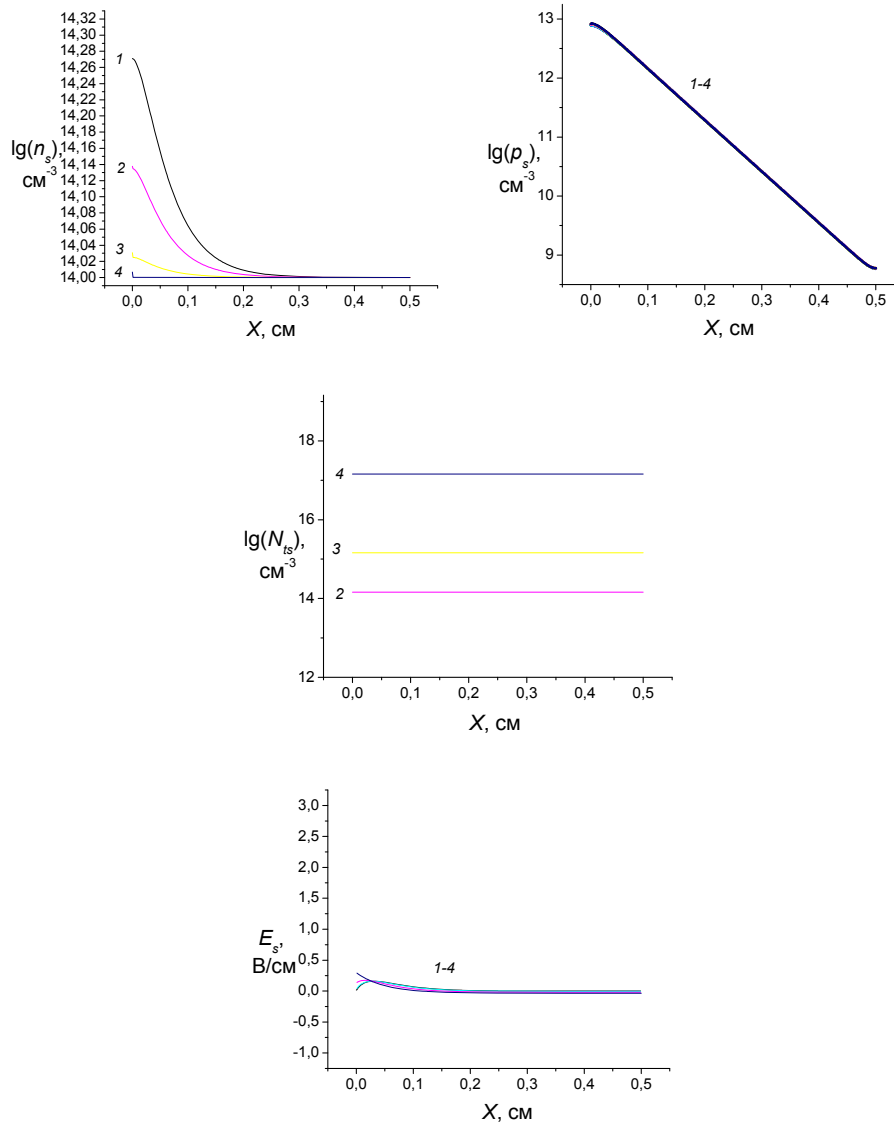


Рис. 2. Розподіл стаціонарних концентрацій та електричного поля при  $\alpha = 20 \text{ см}^{-1}$ ,  $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$  залежно від концентрації центрів прилипання: 1 -  $M_t = 0$ , 2 -  $M_t = 17 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ , 3 -  $M_t = 18 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ , 4 -  $M_t = 20 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 3 показано графіки просторової залежності модулів комплексних амплітуд нестационарних концентрацій  $\Delta n, \Delta p$  і напруженості електричного поля  $\Delta E$  для різних значень концентрації центрів прилипання  $M_t$ , а на рис. 4 для сталого значення  $M_t = 17 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$  при різних рівнях фотозбудження.

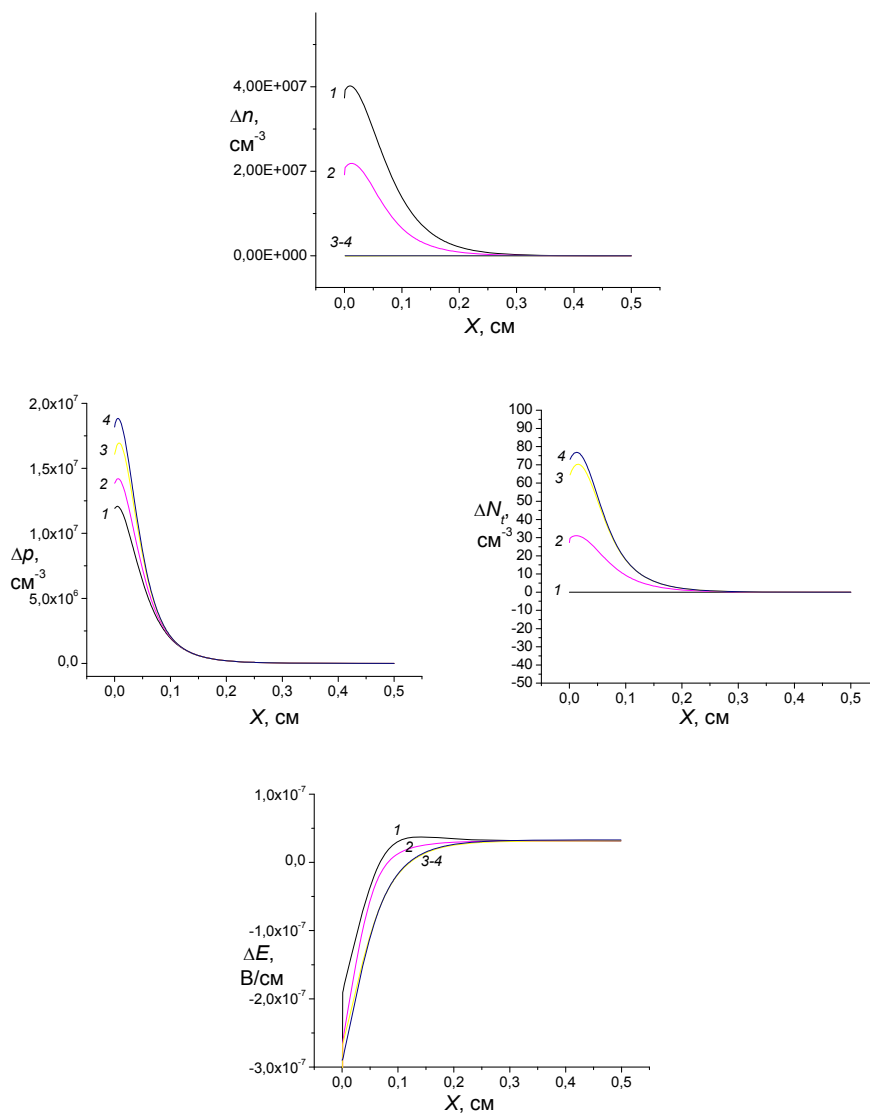


Рис. 3. Розподіл модулів нестационарних концентрацій та електричного поля при  $\alpha = 20 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\Delta g = 10^6 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$  залежно від концентрації центрів прилипання: 1 -  $M_t = 0$ , 2 -  $M_t = 17 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ , 3 -  $M_t = 18 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ , 4 -  $M_t = 20 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

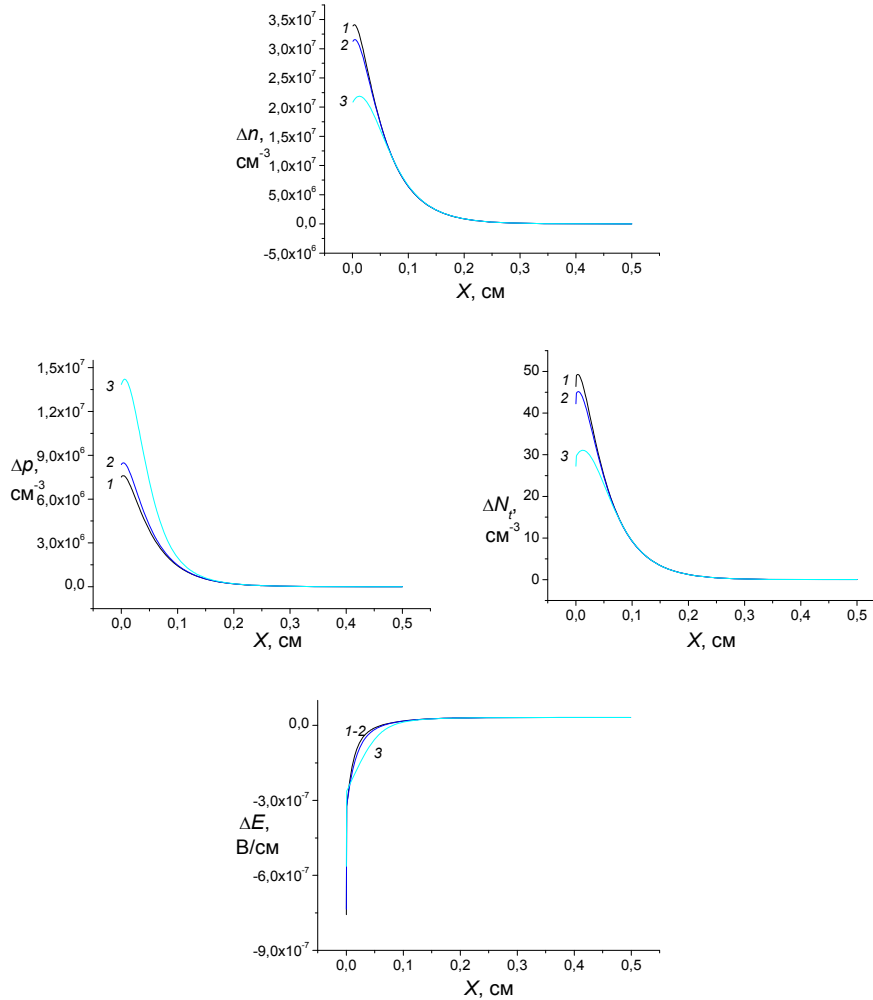


Рис. 4. Розподіл модулів нестационарних концентрацій та електричного поля при  $\alpha = 20 \text{ см}^{-1}$ ,  $\Delta g = 10^6 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $M_t = 17 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$  в залежності від рівня фотозбудження 1-  $g_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ , 2 -  $g_0 = 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ , 3 -  $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ .

Для розрахунків стаціонарних та нестационарних величин використано такі параметри напівпровідника:

$$\begin{aligned}
 L &= 0.5 \text{ см}; & \epsilon_g &= 1 \text{ eV}; & \epsilon_r &= -0.5 \text{ eV}; & \mu_n &= 1500 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; \\
 \mu_p &= 500 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; & C_{nr} &= 1 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}; & C_{pr} &= 1 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}; \\
 M_r &= 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}; & M_t &= 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}; & n_0 &= 10^{14} \text{ см}^{-3}; & T &= 300 \text{ K}.
 \end{aligned}$$

За таких параметрів напівпровідника розраховані інші параметри мають значення  $p_0 = 2.87318 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$ ;  $N_{r0} = 9.99872 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ;  $P_{r0} = 1.27502 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ;

$N_{t0} = 1.44727 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ;  $D_n = 39 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ ;  $D_p = 13 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\tau_{n0} = 1.099 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ ;  $\tau_{p0} = 1.002 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ . Для розбиття використовували сітку з 500 вузлів.

Виконані розрахунки засвідчили, що запропонований метод перетворення ФСР в наближенні часу існування нерівноважних носіїв дає змогу застосовувати для її розв'язування різницевий метод, який є стійким і добре збіжним у широкому діапазоні зміни параметрів напівпровідника та інтенсивності світла.

1. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г.* Физика полупроводников. М.: Наука, 1990. 688 с.
2. *Бубенников А.Н.* Моделирование интегральных микротехнологий, приборов и схем. М.: Высшая школа, 1989. 320 с.
3. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1988. 508 с.
4. *Рывкин С.М.* Фотоэлектрические явления в полупроводниках. - М.: Физматгиз, 1963. 496 с.
5. *Шувар Р.Я., Дацюк Ю.Р., Павлишенко Б.М.* Вплив нелінійної динаміки дифузійно-дрейфових процесів на рекомбінаційний механізм п'єзофоторезистивного ефекту // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. 1998. Вип.30. С. 57 - 60.
6. *Шувар Р.Я., Столярчук О.В.* Чисельний розв'язок фундаментальної системи рівнянь для задач стаціонарної фотопровідності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. 2007. Вип.40. С. 144 - 152.

**NUMERICAL SOLUTION TO THE FUNDAMENTAL SYSTEM OF  
EQUATIONS FOR PROCESSES OF THE MODULATION  
PHOTOCONDUCTIVITY IN THE QUASI-STATIONARY APPROXIMATION.**

**R. Shuvar, O. Stolyarchuk**

*Ivan Franko Lviv National University, Dragomanov Str. 50, UA-79005 Lviv,  
Ukraine, e-mail: stolyarchuk@electronics.wups.lviv.ua*

The present article examines the methods of numerical solution to the fundamental system of equations by analyzing photoconductivity in the set quasi-stationary regime in the linear approximation according to the modulation parameter. The amplitude special distribution of the alternating concentrations of free charge carriers and electric field intensity is calculated. The method of transformation of expressions for recombination rate in the lifetime approximation is suggested. The obtained system of equations is solved by means of finite differences. The optimal selection of expressions for derivative approximation, normalizing coefficients along with the stability and convergence of the differential scheme is researched.

*Key words:* photoconductivity, fundamental system of equations, numerical methods.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.2006  
Прийнята до друку 23.03.2007