ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2007. Вип. 59. С. 119-130 *2007.Is. 59. P. 119-130*

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ

УДК 681.5.015.73

РОЗРАХУНКИ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕГРАЛА ЗГОРТКИ З НЕНУЛЬОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

О. Лозинський, В. Мороз

Національний університет " Львівська політехніка"
вул. Ст. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна
lozynsky@polynet.lviv.ua, vmoroz@polynet.lviv.ua

Запропоновано спосіб розрахунку динаміки керованих електромеханічних систем, який ґрунтується на використанні інтеграла згортки з ненульовими початковими умовами. Досліджувану систему розкладено на суму елементарних динамічних ланок, для кожної з яких знайдено відгук за пропонованою методикою.

Ключові слова: інтеграл згортки, початкові умови, перехідні процеси, електромеханічні системи, електропривід, комп'ютерне моделювання.

Підвищення вимог до достовірності комп'ютерного моделювання сучасних керованих електромеханічних систем, зокрема, електроприводів з силовими колами за принципом широтно-імпульсної модуляції (ШІМ), у багатьох випадках обмежене наявними числовими методами [5]. Це пояснюють тим, що більшість числових методів, які застосовують для розрахунку динаміки, ґрунтуються на обмеженому розкладі в ряд Тейлора, що існує для неперервних диференційованих функцій. Цілком зрозуміло, що часові характеристики керованих електромеханічних систем з імпульсними і дискретними елементами не підпадають під це означення. Як вихід, пропонуємо застосування аналітичних і числово-аналітичних методів, які позбавлені багатьох недоліків традиційних числових методів.

Основа для згаданих підходів – застосування інтеграла згортки (інтеграла Дюамеля), який є узагальненою формою запису перехідних процесів у динамічній системі.

Вихідна координата (реакція) керованої електромеханічної системи $y(t)$ з імпульсною перехідною характеристикою $w(t)$ за дії зовнішнього сигналу (збурення) $x(t)$ описувана для довільного моменту часу t інтегралом згортки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau \,,$$

який враховує дію всієї передісторії зовнішніх впливів $x(t)$ на об'єкт до моменту t. Зрозуміло, що для реальних об'єктів межа інтегрування в часовому проміжку, починаючи від $-\infty$, є фіктивною і не передбачає інформації про початкове значення вихідної координати $y(t)$, тобто апріорі приймають, що від початку динамічна система перебуває у стані повного спокою. Отже, за традиційного підходу інтеграл згортки знаходять для нульових початкових умов.

Для реальних задач розрахунку динаміки електромеханічних систем актуальнішою є проблема знаходження інтеграла згортки для системи, що перебуває в русі в заданий момент часу для ненульових початкових умов (для визначеності приймемо, наприклад, $t = 0$). У такому разі стає можливою побудова рекурентних розрахункових формул для обчислення перехідних процесів під час комп'ютерного моделювання.

Потрібно зазначити, що інтеграл згортки не може бути розбитий на суму інтегралів за окремими проміжками інтегрування за часом, як звичайні означені інтеграли, тому необхідно знайти інший спосіб знаходження інтеграла згортки в потрібному проміжку інтегрування з урахуванням початкового значення вихідної координати.

Розв'язок цієї задачі можна розглянути для двох випадків:

1) загальний випадок, коли наявний повний або частковий набір ненульових початкових умов для вихідної координати $y(t)$ у визначений момент часу $t = 0$: $y_0 \neq 0, y_0' \neq 0, y_0'' \neq 0$, … , $y_0^{(n-2)} \neq 0, y_0^{(n-1)} \neq 0$;
2) частковий випадок – ненульовий усталений режим, коли значення вихідної координати $y(t)$ у конкретний час $t = 0$ є початковою умовою y_0, у цьому разі перша і всі вищі похідні є нульовими або такими, що ними можна знехтувати.

Загальний випадок ненульових початкових умов. Відображення вихідної координати (реакції) керованої електромеханічної системи $Y(s)$ з передатною функцією $W(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)}$ за дії зовнішнього сигналу (збурення) з відображенням $X(s)$ описують для стану з ненульовими початковими умовами виразом [2]

$$Y(s) = \frac{C_0(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} \cdot X(s),$$

де $C_0(s)$ – багаточлен, який відображає початкові умови і який знаходять на підставі рекурентної формули відображення похідної від деякої функції $\varphi(t)$.

У часовому вимірі вираз $\dfrac{C_0(s)}{A(s)}$ є відображенням загального розв'язку $\varphi(t)$ для заданих початкових умов однорідного диференціального рівняння, яке пов'язане з характеристичним поліномом $A(s)$ [4, § 16], [3, с. 298]:

$$y(t) = \varphi(t) + \int_0^t x(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau .$$

Відповідне диференціальне рівняння можна записати з використанням прямого та оберненого перетворень Лапласа стосовно характеристичного полінома $A(s)$, якому і відповідає задане однорідне диференціальне рівняння:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \;;$$

$$\Downarrow$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \,.$$

У випадку ненульових початкових умов потрібно застосувати теорему диференціювання для оригіналу [1, § 7], у такому разі отримаємо

$$L\left(a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \left(s^n Y_0(s) - y_0 s^{n-1} - y_0' s^{n-2} - \ldots - y_0^{(n-2)} s - y_0^{(n-1)}\right) +$$

$$+\; a_{n-1} \left(s^{n-1} Y_0(s) - y_0 s^{n-2} - y_0' s^{n-3} - \ldots - y_0^{(n-3)} s - y_0^{(n-2)}\right) + \ldots +$$

$$+ a_2 \left(s^2 Y_0(s) - y_0 s - y_0'\right) + a_1 \left(s Y(s) - y_0\right) + a_0 Y(s) =$$

$$= Y_0(s) \cdot \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) - y_0 \sum_{i=1}^{n} a_i s^{i-1} - y_0' \sum_{i=2}^{n} a_i s^{i-2} -$$

$$- \ldots - y_0^{(n-2)} \sum_{i=n-1}^{n} a_i s^{i-(n-1)} - y_0^{(n-1)} a_n =$$

$$= Y_0(s) \cdot A(s) - \sum_{j=1}^{n} \left(y_0^{(j-1)} \sum_{i=j}^{n} a_i s^{i-j} \right),$$

де $y_{0,} y_0', y_0'', \ldots.., y_0^{(n-2)}, y_0^{(n-1)}$ – відповідні ненульові початкові умови однорідного диференціального рівняння $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots \; + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$, розв’язком якого є функція φ(t); Y_0(s) – відображення за Лапласом розв’язку згаданого вище однорідного рівняння з ненульовими початковими мовами.

Отже, однорідне диференціальне рівняння матиме відображення

$$Y_0(s) \cdot A(s) - \sum_{j=1}^{n} \left(y_0^{(j-1)} \sum_{i=j}^{n} a_i s^{i-j} \right) = 0 \,,$$

звідки після невеликих алгебричних перетворень отримаємо

$$Y_0(s) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(y_0^{(j-1)} \sum_{i=j}^{n} a_i s^{i-j} \right)}{A(s)} = \frac{C_0(s)}{A(s)} \,.$$

Перейдемо за допомогою оберненого перетворення Лапласа до часових функцій, отримаємо шуканий вираз для функції φ(t), яка є розв’язком однорідного диференціального рівняння за ненульових початкових умов:

$$\varphi(t) = L^{-1}\left(Y_0(s)\right) = L^{-1}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_0^{(j-1)}\sum\limits_{i=j}^{n} a_i s^{i-j}\right)}{A(s)}\right). \tag{1}$$

Наведене рівняння достатньо просто розв'язати для конкретних випадків електромеханічних систем із заданими передатними функціями та заданими початковими умовами за допомогою сучасних комп'ютерних програм аналітичної математики (наприклад, Derive, Maple, MathCAD тощо). Задача спрощується застосуванням до виразу $\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_0^{(j-1)}\sum\limits_{i=j}^{n} a_i s^{i-j}\right)}{A(s)}$ відомої з алгебри теореми розкладу на елементарні дроби і знаходження для кожного з них відповідної часової функції.

Отже, загальний розв'язок інтеграла згортки за дії зовнішнього сигналу $x(t)$ на об'єкт з передатною функцією $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ для набору ненульових початкових умов $y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-2)}, y_0^{(n-1)}$ матиме вигляд

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_0^{(j-1)}\sum\limits_{i=j}^{n} a_i s^{i-j}\right)}{A(s)}\right) + \int\limits_0^t x(\tau)\cdot w(t-\tau)\, d\tau . \tag{2}$$

Усталений режим з ненульовою вихідною координатою. Розв'язок на підставі загальної формули. Реакцію системи на ненульові початкові умови, як уже зазначено, описують однорідним диференціальним рівнянням, відображення розв'язку якого $y_0(t)$ матиме вигляд

$$Y_0(s) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_0^{(j-1)}\sum\limits_{i=j}^{n} a_i s^{i-j}\right)}{A(s)} .$$

Оскільки розглядаємо усталений режим, то всі вищі похідні вихідної координати є нульовими: $y_0' = 0, y_0'' = 0, \cdots, y_0^{(n-2)} = 0, y_0^{(n-1)} = 0$. Внаслідок цього формулу можна спростити:

$$Y_0(s) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i s^{i-1}}{A(s)}\cdot y_0 = \frac{\frac{A(s)-a_0}{s}}{A(s)}\cdot y_0 = \frac{A(s)-a_0}{s\cdot A(s)}\cdot y_0 = \left(\frac{1}{s} - \frac{a_0}{s\cdot A(s)}\right)\cdot y_0 .$$

Із застосуванням переходу до часової області за допомогою оберненого перетворення Лапласа і врахуванням того, що

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s\cdot A(s)}\right)=h(t)$, де $h(t)$ – перехідна характеристика системи;
- $\dfrac{1}{a_0}=K=h(\infty)$ – статичний коефіцієнт підсилення,

матимемо остаточне значення реакції системи $y_0(t)$ на ненульову початкову умову для усталеного режиму:

$$y_0(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{a_0}{s\cdot A(s)}\right)\cdot y_0=\left(1-\frac{h(t)}{h(\infty)}\right)\cdot y_0 .$$

Отже, для системи, що перебуває в усталеному стані з ненульовою початковою умовою $\left.y(t)\right|_{t=0}=y_0$, реакція системи, знайдена за допомогою інтеграла згортки, набуде вигляду

$$y(t)=y_0\cdot\left(1-\frac{h(t)}{h(\infty)}\right)+\int_0^t x(\tau)\cdot w(t-\tau)\,d\tau .$$

Розв'язок на підставі теореми про середнє значення. Цей підхід можна використати для перевірки отриманих результатів за допомогою попереднього способу.

Усталене значення вихідної координати $y(t)$ у конкретний час $t=0$ з початковими умовами y_0 визначене інтегралом згортки у часовому проміжку $t\in(-\infty;0)$ за дії сигналу збурення $x(t)$, який достатньо тривалий, щоб вивести систему на усталений режим:

$$\left.y(t)\right|_{t=0}=y_0=\int_{-\infty}^{0} x(\tau)\cdot w(t-\tau)\,d\tau .$$

Тому можна умовно розбити вхідний сигнал (збурення) $x(t)$ на дві складові (рис. 1):

1) сигнал $\left.x_1(t)\right|_{-\infty<t<0}=x(t)$, який діє в діапазоні $t\in(-\infty;0)$ і в кінці цього проміжку виводить систему з імпульсною перехідною характеристикою $w(t)$ в усталений стан з вихідною координатою $\left.y(t)\right|_{t=0}=y_0$, яка і є початковою умовою; далі значення сигналу $x_1(t)$ приймають нульовим: $\left.x_1(t)\right|_{t>0}=0$;

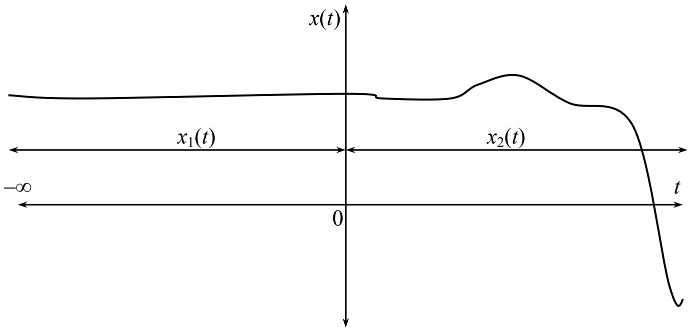

Рис. 1. Розкладання вхідного сигналу $x(t)$ на дві складові.

2) сигнал $x_2(t)\Big|_{0 \le t \le t} = x(t)$, який діє в інтервалі $t \in [0;t]$ і для якого, власне, розраховують перехідний процес; для $t < 0$ значення сигналу $x_2(t)$ приймають нульовим: $x_2(t)\Big|_{t<0} = 0$. З урахуванням цього для заданого сигналу складову загального інтеграла згортки знаходять так:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau \, .$$

Зазначимо, що

$$x_1(t) + x_2(t) = x(t) \qquad \text{або} \qquad x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{äëÿ} \quad t < 0; \\ x_2(t) & \text{äëÿ} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Для розділення обох складових $x_1(t)$ і $x_2(t)$ у разі знаходження повного інтеграла згортки застосовано штучний прийом (рис. 2):

- з теореми про середнє значення означеного інтеграла визначають еквівалентне значення x_0 для вхідного сигналу (збурення) $x(t)\Big|_{t<0}$, яке привело б систему до усталеного стану $y(t)\Big|_{t=0} = y_0$; у такому разі

$$\int_{-\infty}^{0} x_1(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} x(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau = y(t)\Big|_{t=0} = y_0 = x_0 \cdot h(\infty) \, ,$$

де $h(t)$ – перехідна характеристика системи, а $h(\infty) = K$, де K – статичний коефіцієнт підсилення системи;

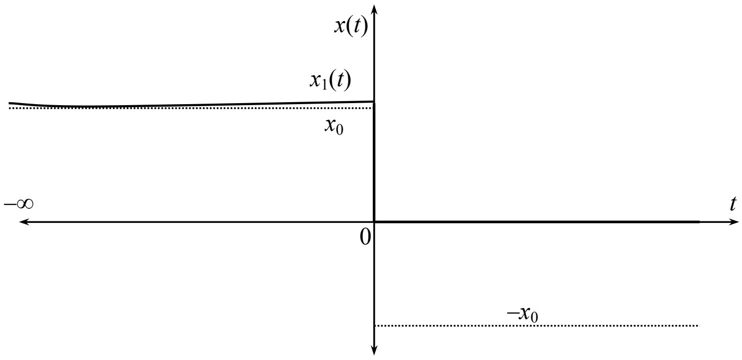

Рис. 2. Подання сигналу $x_1(t)$ двома складовими.

- для компенсації збурювальної дії сигналу $x_1(t)$ за моментів часу $t > 0$ (нагадаємо, що $\left. x_1(t) \right|_{t>0} = 0$) вводять фіктивний сигнал зі значенням $-x_0$, що дає змогу математично коректно записати межі інтегрування в інтегралі згортки з урахуванням нульових значень підінтегральної функції у відповідні проміжки часу. Результатом перетворень є функція відгуку системи на ненульову початкову умову:

$$\int_{-\infty}^{t} \left. x_1(\tau) \right|_{t<0} \cdot w(t-\tau)\, d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x_0 \cdot w(t-\tau)\, d\tau}_{y_0} - \int_{0}^{t} x_0 \cdot w(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= y_0 - x_0 \cdot \int_{0}^{t} w(t-\tau)\, d\tau = y_0 - x_0 \cdot h(t) = y_0 - \frac{y_0}{h(\infty)} \cdot h(t) = y_0 \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{h(\infty)} \right).$$

До отриманого виразу додаємо реакцію системи, знайдену за допомогою інтеграла згортки, для проміжку часу $t > 0$:

$$y(t) = y_0 \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{h(\infty)} \right) + \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau = y_0 \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{h(\infty)} \right) + \int_{0}^{t} x(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau .$$

Отже, для системи, що перебуває в усталеному стані з ненульовою початковою умовою $\left. y(t) \right|_{t=0} = y_0$, реакція системи, знайдена за допомогою інтеграла згортки, така:

$$y(t) = y_0 \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{h(\infty)} \right) + \int_{0}^{t} x(\tau) \cdot w(t-\tau)\, d\tau .$$

Як бачимо, обидва результати збігаються, що може слугувати доказом їхньої коректності.

Застосування інтеграла згортки для опису динаміки елементарних динамічних ланок. Загальний розв'язок інтеграла згортки за дії зовнішнього сигналу $x(t)$ для набору ненульових початкових умов $y_0, y_0', y_0'', ...$ розглянемо на прикладі трьох елементарних динамічних ланок – інтегратора, аперіодичної ланки першого порядку і коливної ланки другого порядку.

Застосування розкладання системи на елементарні динамічні ланки дає змогу спростити процес знаходження інтеграла згортки – відшукують реакції для елементарних складових, а потім підсумовують для одержання остаточного відгуку системи. Така процедура можлива для реальних електромеханічних систем, описуваних правильними дробово-раціональними передатними функціями, тобто порядок полінома чисельника не перевищує порядку полінома знаменника, що дає змогу розкласти таку систему на елементарні складові, які відповідно відображені на комплексній площині (рис. 3):

- нульові полюси (*інтегральні складові*);
- прості дійсні полюси (*аперіодичні ланки першого порядку*);
- пари комплексно спряжених полюсів (*коливні ланки другого порядку*).

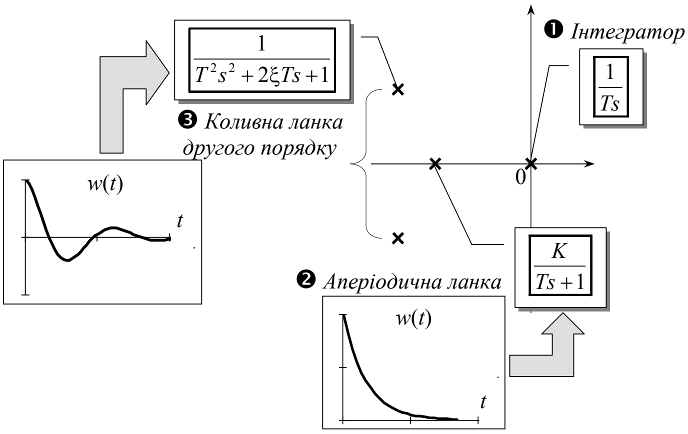

Рис. 3. Розміщення полюсів елементарних динамічних ланок та відповідні їм імпульсні перехідні характеристики.

Із застосуванням відомої з математичного аналізу теореми розкладу правильного раціонального дробу передатну функцію електромеханічної системи можна розкласти на елементарні дроби вигляду $\frac{A}{s}$, $\frac{B}{s+a}$ і $\frac{C \cdot s + D}{s^2 + p \cdot s + q}$ (у закордонній літературі цей підхід відомий як теорема розкладу Хевісайда).

За наявності нелінійних елементів можна застосувати принцип кусково-лінійної апроксимації, що дає змогу на кожному окремому інтервалі розглядати систему як лінійну. У такому разі часовий інтервал дискретності можна вибрати достатньо малим з умови зменшення похибок кусково-лінійної апроксимації. Отже, передатну функцію електромеханічної системи, як уже зазначено, можна розкласти на суму окремих елементарних динамічних ланок (елементарних дробів):

- $\dfrac{A}{s}$ – відповідає інтегральній ланці (*нульовому полюсу*) з передатною функцією $\dfrac{1}{T\cdot s}$ та імпульсною перехідною функцією ланки $w(t)=\dfrac{1(t)}{T}$;
- $\dfrac{B}{s+a}$ – відповідає аперіодичній ланці першого порядку (*дійсному полюсу*) з передатною функцією $\dfrac{1}{T\cdot s+1}$ та імпульсною перехідною функцією ланки $w(t)=\dfrac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$;
- $\dfrac{C\cdot s+D}{s^2+p\cdot s+q}$ – дає змогу врахувати в сумарній передатній функції пару комплексно спряжених полюсів і може бути подано сумою передатних функцій двох стандартних ланок другого порядку з відповідними ваговими коефіцієнтами:
  - з передатною функцією $\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ та імпульсною перехідною функцією ланки $w(t)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega_0\cdot t)$ (*синусна складова*);
  - з передатною функцією $\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ та імпульсною перехідною функцією ланки $w(t)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$ (*косинусна складова*).

Отже, елементарний дріб $\dfrac{C\cdot s+D}{s^2+p\cdot s+q}$ можна записати як суму синусної та косинусної складових з відомими часовими відповідниками:

$$\frac{C\cdot s+D}{s^2+p\cdot s+q}=K_s\cdot\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}+K_c\cdot\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},$$

де $\alpha=\dfrac{p}{2}$ – коефіцієнт демпфування (вгамування) ланки; $\omega_0=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ – власна частота коливної ланки; $K_s=\dfrac{D-C\cdot\alpha}{\omega_0}$ – ваговий коефіцієнт синусної складової; $K_c=C$ – ваговий коефіцієнт косинусної складової.

Процедура розкладу на елементарні дроби дещо ускладнена за наявності кратних коренів через появу додаткових доданків, що, зрештою, не змінює суті пропонованого підходу. Крім того, в реальних електромеханічних і електротехнічних системах кратні корені є вкрай рідкісним явищем через неминучий технологічний розкид параметрів.

Інтегральна ланка. Інтегральна ланка має характеристичний поліном $A(s)=Ts$ з відповідними коефіцієнтами $a_1=T$, $a_0=0$. Імпульсна перехідна характеристика описувана виразом $w(t)=\dfrac{1}{T}$. Отже, для інтегральної ланки реакцію на ненульові початкові умови, згідно з рівнянням (1), запишемо у вигляді

$$y_0(t)=L^{-1}\left(\frac{a_1}{A(s)}\cdot y_0\right)=L^{-1}\left(\frac{T}{T\cdot s}\cdot y_0\right)=y_0\,.$$

У цілому ж інтеграл згортки для інтегральної ланки за ненульової початкової умови y_0 описуваний виразом

$$y(t)=y_0+\int_0^t\frac{x(t)}{T}dt=y_0+\frac{1}{T}\int_0^t x(t)\,dt\,.$$

Аперіодична ланка першого порядку. Аперіодична ланка першого порядку має характеристичний поліном $A(s)=Ts+1$ з відповідними коефіцієнтами $a_1 = T$, $a_0 = 1$. Імпульсна перехідна характеристика описувана виразом $w(t)=\dfrac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$. Отже, для аперіодичної ланки першого порядку реакцію на ненульові початкові умови, згідно з рівнянням (1), запишемо у такому вигляді:

$$y_0(t)=L^{-1}\left(\frac{a_1\cdot y_0}{A(s)}\right)=L^{-1}\left(\frac{T}{T\cdot s+1}\cdot y_0\right)=y_0e^{-\frac{t}{T}}\,.$$

У цілому ж інтеграл згортки для аперіодичної ланки за ненульової початкової умови y_0 описуваний виразом

$$y(t)=y_0\cdot e^{-\frac{t}{T}}+\int_0^t\frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{T}\cdot x(t-\tau)\,d\tau=y_0\cdot e^{-\frac{t}{T}}+\frac{1}{T}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}}\cdot x(\tau)\,d\tau\,.$$

Коливна ланка другого порядку. Для опису пари комплексно спряжених полюсів, як зазначено, потрібно дві складові:

- з передатною функцією $\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ та імпульсною перехідною функцією ланки $w_s(t)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega_0\cdot t)$ (*синусна складова*);
- з передатною функцією $\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ та імпульсною перехідною функцією ланки $w_c(t)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$ (*косинусна складова*).

Характеристичний поліном в обох випадках є однаковим і описуваний виразом $A(s)=s^2+2\alpha\cdot s+\alpha^2+\omega_0^2$ з відповідними коефіцієнтами $a_2 = 1$, $a_1 = 2\alpha$, $a_0=\alpha^2+\omega_0^2$. Отже, реакція на ненульові початкові умови, згідно з рівнянням (1), для обох складових буде однаковою:

$$y_0(t)=L^{-1}\left(\frac{y_0\cdot(a_1+a_2\cdot s)+y_0'\cdot a_2}{A(s)}\right)=$$

$$=\left(\left(\cos(\omega_0 t)+\frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)\cdot y_0+\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\cdot y_0'\right)\cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

У цілому ж інтеграл згортки для кожної складової за ненульових початкових умов y_0 та y'_0 описуваний виразом

синусна складова

$$y_s(t) = \left((\cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)) \cdot y_0 + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \cdot y'_0 \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_0 t) \cdot x(t-\tau)\, d\tau \ ;$$

косинусна складова

$$y_c(t) = \left((\cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)) \cdot y_0 + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \cdot y'_0 \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t e^{-\alpha \cdot t} \cos(\omega_0 t) \cdot x(t-\tau)\, d\tau \ .$$

Пропонований спосіб розрахунку динаміки за допомогою інтеграла згортки з урахуванням ненульових початкових умов можна застосувати для обчислення перехідних процесів у будь-яких електротехнічних та електромеханічних системах, а також для побудови рекурентних обчислювальних процедур. У разі їхнього використання для комп’ютерного моделювання сучасних електромеханічних і електротехнічних систем можна отримати низку переваг:

1) вирішити проблеми числової стійкості незалежно від кроку розв’язування;
2) підвищити точність обчислень завдяки використанню аналітичних методів;
3) отримані на підставі пропонованого підходу рекурентні формули для моделювання динамічних ланок можна застосовувати для розрахунку перехідних процесів електротехнічних і електромеханічних пристроїв з імпульсними та дискретними елементами;
4) застосування розкладу досліджуваної системи на елементарні динамічні ланки дає змогу раціонально застосувати паралельні обчислення на багатопроцесорних системах.

---

1. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразо вания Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
2. *Зайцев Г. Ф., Костюк В. И., Чинаев П. И.* Основы автомати ческого управления и регулирования. К.: Техніка, 1977. 472 с.
3. *Иващенко Н. Н.* Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем: Учебник для вузов: Изд. 4-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1978. 736 с.
4. Математические основы теории автоматического регулирования. Т. 1: Изд. 2-е, доп. / Под ред. Б. К. Чемоданова. М.: Высшая школа, 1977. 366 с.
5. *Мороз В.* Особливості застосування числових методів у моделюванні сучасних електроприводів // Теор. електротехніка. 2005. Вип. 58. С. 130–137.

TRANSIENT PROCESSES OF THE ELECTROMECHANICAL SYSTEMS CALCULATION USING CONVOLUTION INTEGRAL WITH NONZERO INITIAL VALUES

O. Lozynsky, V. Moroz

Lviv Polytechnic National University
Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine
lozynsky@polynet.lviv.ua, vmoroz@polynet.lviv.ua

The approach to calculate transient processes of the electromechanical systems using the convolution integral with nonzero initial value is offered in this paper. Investigated system is decomposed to the sum of the elementary dynamic blocks with the computed responses of the each block.

Key words: convolution integral, initial value, transient processes, electromechanical systems, electrical drive, computer simulation.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2007
Прийнята до друку 10.03.2007