

УДК 621.314

**ВЕКТОРНИЙ ПОТЕНЦІАЛ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА
ІНДУКТИВНОСТІ РОЗСІЯННЯ І КОРОТКОГО ЗАМИКАННЯ
ЕКРАНОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ СПІВВІСНИХ ОБМОТОК
НА ФЕРОМАГНІТНОМУ ОСЕРДІ**

М. Яцун, А. Яцун*

*Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, Львів 79013, Україна*

**Львівський державний аграрний університет
вул. В. Великого, 1, Дубляни, Жовківського району, Львівської області,
80381, Україна*

Отримано вирази для власної і взаємної індуктивностей, індуктивностей розсіяння і короткого замикання циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді залежно від геометричних розмірів і взаємного розміщення обмоток, розмірів і властивостей екрана.

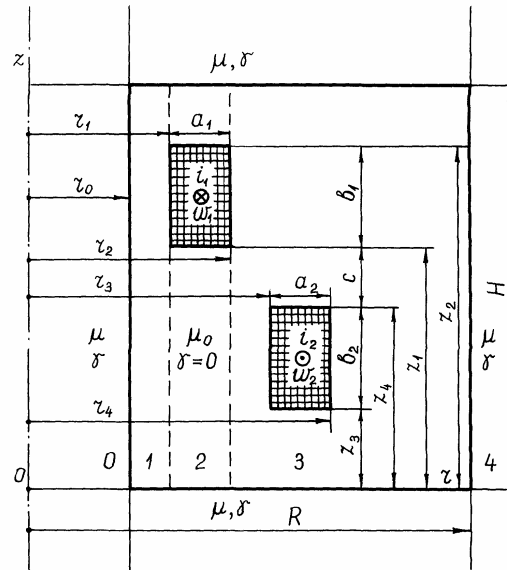
Ключові слова: векторний потенціал магнітного поля, індуктивності розсіяння і короткого замикання, екрановані циліндричні співвісні обмотки, феромагнітне осердя.

Феромагнітні екрани в розрахункових моделях індуктивностей циліндричних співвісних обмоток (катушок) на феромагнітному осерді відображають у силових масляних трансформаторах і багатьох реакторах стінки, дно і кришку бака, а також ярмові балки. Тоді під час дослідження магнітного поля і подальшого визначення індуктивностей обмоток граничні умови на частинах екрана враховують шляхом розкладу густини струму в обмотках і векторного потенціалу магнітного поля в ряд Фур'є по осевій координаті. Якщо висота обмоток близька до висоти екрана, то сталі складові ряду Фур'є є визначальними (головними) і не залежать від осевої координати, а гармонічні складові – додатковими. Тому в загальному випадку необхідно знати сталі й гармонічні складові розв'язків.

Як і в праці [3], використаємо розрахункову модель, що показана на рисунку. Ця модель складається з двох співвісних циліндричних катушок на феромагнітному осерді без втрат і замкнутого екрана заввишки H у формі двох циліндрів і двох однакових шайб з радіусами r_0 і R , які приймаємо з безмежно великою магнітною проникністю або надпровідними, вони відображають ярма і ярмові балки, дно, кришку і стінки бака [2]. Екран охоплює три ділянки (1 – 3) з магнітною сталою μ_0 . Первинна обмотка (збудження) з кількістю витків w_1 і струмом i_1 має внутрішній і зовнішній радіуси, відповідно, r_1 і r_2 , ширину a_1 і

висоту b_1 . Вторинна обмотка з кількістю витків w_2 і струмом i_2 має внутрішній і зовнішній радіуси, відповідно, r_3 і r_4 , ширину a_2 і висоту b_2 .

У праці [1] власні та взаємні індуктивності розсіяння котушок визначають за наближеними формулами і зі значними застереженнями (припущеннями), у [3] визначено гармонічні складові власної та взаємної індуктивностей розсіяння циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді, намотаних з тонкого дроту, а в [4] – головні складові цих величин.



Розрахункова модель
з циліндричними співвісними обмотками.

Повні розв'язки отримаємо шляхом підсумовування головних [4] і гармонічних [3] складових. Тоді в режимі короткого замикання ($i_2 w_2 = -i_1 w_1$) для векторного потенціалу A і магнітної індукції ($B = B_z = [\partial(rA)/(\partial r)]/r$) від струмів у обох обмотках для звичайного випадку $r_1 < r_2 \leq r_3 < r_4$ одержимо таке:

при $r_0 \leq r \leq r_1$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (\pi\mu_0\delta_{01}/2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} B_1 \cos(nz) (r_2 D_2 - r_1 D_4) / (nB_0) + \\
 &+ (\pi\mu_0\delta_{02}/2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k2} B_1 \cos(nz) (r_4 D_7 - r_3 D_8) / (nB_0) = \\
 &= (\pi\mu_0 i_1 w_1 / 2) \sum_{k=1}^{\infty} [B_1 / (nB_0)] \cos(nz) \{ [b_{k1} / (a_1 b_1)] (r_2 D_2 - r_1 D_4) - [b_{k2} / (a_2 b_2)] (r_4 D_7 - r_3 D_8) \};
 \end{aligned}$$

$$B_1 = 0; \tag{1}$$

при $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\begin{aligned} A_2 &= [\mu_0 i_1 w_1 / (6a_1 H)] (3r_1 r - r_1^3 / r - 2r^2) + \\ & (\pi \mu_0 \delta_{01} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} \cos(nz) \{r_2 B_1 D_2 - r_1 B_2 D_3 - B_0 L_1(nr) / n\} / (nB_0) + \\ & (\pi \mu_0 \delta_{02} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k2} B_1 \cos(nz) (r_4 D_7 - r_3 D_8) / (nB_0) = \\ & [\mu_0 i_1 w_1 / (6a_1 H)] (3r_1 r - r_1^3 / r - 2r^2) + (\pi \mu_0 i_1 w_1 / 2) \times \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(nz) \{ [b_{k1} / (a_1 b_1)] [r_2 B_1 D_2 - r_1 B_2 D_3 - B_0 L_1(nr) / n] - [B_1 b_{k2} / (a_2 b_2)] (r_4 D_7 - r_3 D_8) \} / (nB_0);$$

$$B_2 = [\mu_0 i_1 w_1 / (a_1 H)] (r_1 - r); \tag{2}$$

при $r_2 \leq r \leq r_3$

$$\begin{aligned} A_{31} &= [\mu_0 i_1 w_1 / (6H)] \left[\frac{r^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r} - 3r \right] + \\ & (\pi \mu_0 \delta_{01} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} B_2 \cos(nz) (r_2 D_1 - r_1 D_3) / (nB_0) + \\ & (\pi \mu_0 \delta_{02} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k2} B_1 \cos(nz) (r_4 D_7 - r_3 D_8) / (nB_0) = [\mu_0 i_1 w_1 / (6H)] \left[\frac{r^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r} - 3r \right] + \\ & (\pi \mu_0 i_1 w_1 / 2) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(nz) \{ [B_2 b_{k1} / (a_1 b_1)] (r_2 D_1 - r_1 D_3) - [B_1 b_{k2} / (a_2 b_2)] (r_4 D_7 - r_3 D_8) \} / (nB_0); \end{aligned}$$

$$B_{31} = -\mu_0 i_1 w_1 / H; \tag{3}$$

при $r_3 \leq r \leq r_4$

$$\begin{aligned} A_{32} &= [\mu_0 i_1 w_1 / (H)] \left\{ \frac{r^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{(6r)} - \left[\frac{r_4 r / 2 - r_3^3}{(6r) - r^2 / 3} \right] / a_2 \right\} + \\ & (\pi \mu_0 \delta_{01} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} B_2 \cos(nz) (r_2 D_1 - r_1 D_3) / (nB_0) + \\ & + (\pi \mu_0 \delta_{02} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k2} \cos(nz) \{ r_4 B_1 D_7 - r_3 B_2 D_6 - B_0 L_1(nr) / n \} / (nB_0) = \\ & = [\mu_0 i_1 w_1 / (H)] \left\{ \frac{r^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{(6r)} - \left[\frac{r_4 r / 2 - r_3^3}{(6r) - r^2 / 3} \right] / a_2 \right\} + (\pi \mu_0 i_1 w_1 / 2) \times \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \cos(nz) \{ [B_2 b_{k1} / (a_1 b_1)] (r_2 D_1 - r_1 D_3) - [b_{k2} / (a_2 b_2)] [r_4 B_1 D_7 - r_3 B_2 D_6 - B_0 L_1(nr) / n] \} / (nB_0); \end{aligned}$$

$$B_{32} = -\mu_0 i_1 w_1 (r_4 - r) / (a_2 H); \tag{4}$$

при $r_4 \leq r \leq R$

$$\begin{aligned}
 A_{33} &= [\mu_0 i_1 w_1 / (H)] \left[(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2) - (r_4^2 + r_4 r_3 + r_3^2) \right] / (6r) + \\
 & (\pi \mu_0 \delta_{01} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} B_2 \cos(nz) (r_2 D_1 - r_1 D_3) / (n B_0) + \\
 & (\pi \mu_0 \delta_{02} / 2) \sum_{k=1}^{\infty} b_{k2} B_2 \cos(nz) (r_4 D_5 - r_3 D_6) / (n B_0) = \\
 & (\mu_0 i_1 w_1 / H) \left[(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2) - (r_4^2 + r_4 r_3 + r_3^2) \right] / (6r) + \\
 & (\pi \mu_0 i_1 w_1 / 2) \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_2 / (n B_0) \right] \cos(nz) \left\{ [b_{k1} / (a_1 b_1)] (r_2 D_1 - r_1 D_3) - [b_{k2} / (a_2 b_2)] (r_4 D_5 - r_3 D_6) \right\}; \\
 B_{33} &= 0, \tag{5}
 \end{aligned}$$

де $n = \pi k / H$; $\delta_{01} = i_1 w_1 / (a_1 b_1)$; $\delta_{02} = i_2 w_2 / (a_2 b_2)$; при $k=0$ $b_{01} = b_1 / H$; $b_{02} = b_2 / H$; при $k=1, 2, 3, \dots$

$$b_{k1} = 4 \sin(n b_1 / 2) \cos[n(z_1 + b_1 / 2)] / (k \pi); \quad b_{k2} = 4 \sin(n b_2 / 2) \cos[n(z_3 + b_2 / 2)] / (k \pi);$$

$$B_0 = K_0(n r_0) I_0(n R) - I_0(n r_0) K_0(n R);$$

$$B_{01} = I_1(n r_1) K_0(n R) + I_0(n R) K_1(n r_1); \quad B_{02} = I_1(n r_1) K_0(n r_0) + I_0(n r_0) K_1(n r_1);$$

$$B_1 = K_0(n r_0) I_1(n r) - I_0(n r_0) K_1(n r); \quad B_2 = K_0(n R) I_1(n r) - I_0(n R) K_1(n r);$$

$$B_3 = I_1(n r_2) L_0(n r_2) - I_0(n r_2) L_1(n r_2); \quad B_4 = I_1(n r_1) L_0(n r_1) - I_0(n r_1) L_1(n r_1);$$

$$B_5 = K_1(n r_2) L_0(n r_2) + K_0(n r_2) L_1(n r_2); \quad B_6 = K_1(n r_1) L_0(n r_1) + K_0(n r_1) L_1(n r_1);$$

$$B_7 = I_1(n r) L_0(n r) - I_0(n r) L_1(n r); \quad B_8 = K_1(n r) L_0(n r) + K_0(n r) L_1(n r);$$

$$B_9 = I_1(n r_4) L_0(n r_4) - I_0(n r_4) L_1(n r_4); \quad B_{10} = I_1(n r_3) L_0(n r_3) - I_0(n r_3) L_1(n r_3);$$

$$B_{11} = K_1(n r_4) L_0(n r_4) + K_0(n r_4) L_1(n r_4); \quad B_{12} = K_1(n r_3) L_0(n r_3) + K_0(n r_3) L_1(n r_3);$$

$$D_1 = B_3 K_0(n r_0) + B_5 I_0(n r_0); \quad D_2 = B_3 K_0(n R) + B_5 I_0(n R);$$

$$D_3 = B_4 K_0(n r_0) + B_6 I_0(n r_0); \quad D_4 = B_4 K_0(n R) + B_6 I_0(n R);$$

$$D_5 = B_9 K_0(n r_0) + B_{11} I_0(n r_0); \quad D_6 = B_{10} K_0(n r_0) + B_{12} I_0(n r_0);$$

$$D_7 = B_9 K_0(n R) + B_{11} I_0(n R); \quad D_8 = B_{10} K_0(n R) + B_{12} I_0(n R);$$

$$F_{01} = \int_{r_1}^{r_2} r L_1(n r) dr; \quad F_{02} = \int_{r_1}^{r_4} r L_1(n r) dr; \quad F_{03} = \int_{r_3}^{r_2} r L_1(n r) dr; \quad F_{04} = \int_{r_3}^{r_4} r L_1(n r) dr;$$

$$F_1 = \int_{r_1}^{r_2} r_1 I_1(n r_1) dr_1 = \frac{\pi}{2n} (r_2 B_3 - r_1 B_4); \quad F_2 = \int_{r_1}^{r_2} r_1 K_1(n r_1) dr_1 = \frac{\pi}{2n} (r_2 B_5 - r_1 B_6);$$

$$F_3 = \int_{r_1}^r r_1 I_1(n r_1) dr_1 = \frac{\pi}{2n} (r B_7 - r_1 B_4); \quad F_4 = \int_{r_1}^r r_1 K_1(n r_1) dr_1 = \frac{\pi}{2n} (r B_8 - r_1 B_6);$$

$$\begin{aligned}
 F_5 &= \int_r^{r_2} r_1 I_1(nr_1) dr_1 = \frac{\pi}{2n} (r_2 B_3 - r B_7); & F_6 &= \int_r^{r_2} r_1 K_1(nr_1) dr_1 = \frac{\pi}{2n} (r_2 B_5 - r B_8); \\
 F_7 &= \int_{r_3}^{r_4} r I_1(nr) dr = \frac{\pi}{2n} (r_4 B_9 - r_3 B_{10}); & F_8 &= \int_{r_3}^{r_4} r K_1(nr) dr = \frac{\pi}{2n} (r_4 B_{11} - r_3 B_{12}); \\
 P_1 &= K_0(nr_0) F_1 - I_0(nr_0) F_2; & P_2 &= K_0(nR) F_1 - I_0(nR) F_2; \\
 P_3 &= K_0(nr_0) F_7 - I_0(nr_0) F_8; & P_4 &= K_0(nR) F_7 - I_0(nR) F_8;
 \end{aligned}$$

$I_0(x)$ і $K_0(x)$ – модифіковані функції Бесселя (циліндричні), відповідно, першого і другого роду нульового порядку; I_1 і K_1 – модифіковані функції Бесселя першого порядку, відповідно, першого і другого роду; $L_0(x)$ і $L_1(x)$ – модифіковані функції Струве нульового і першого порядку.

Тоді для випадку $r_1 < r_2 \leq r_3 < r_4$ повні індуктивності розсіяння первинної обмотки

$$L_{\sigma 1} = \frac{2\pi w_1^2}{a_1^2 b_1^2 \delta_{01}} \int_{z_1}^{z_1+b_1} dz \int_{r_1}^{r_2} r A_2 dr = -\frac{\pi \mu_0 w_1^2 (r_2^2 - r_1^2)}{6H} + \frac{\pi^2 \mu_0 w_1^2 H}{2a_1 b_1} \times \quad (6)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} \{ [b_{k1}/(a_1 b_1)] [r_2 P_1 D_2 - r_1 P_2 D_3 - B_0 F_{01}/n] - [P_1 b_{k2}/(a_2 b_2)] (r_4 D_7 - r_3 D_8) \} / (n B_0),$$

а вторинної обмотки

$$L_{\sigma 2} = \frac{2\pi w_2^2}{a_2^2 b_2^2 \delta_{02}} \int_{z_2}^{z_2+b_2} dz \int_{r_3}^{r_4} r A_{32} dr = \frac{\pi \mu_0 w_2^2}{6H} \left[(r_4 + r_3)^2 + 2(r_3^2 - r_2^2 - r_2 r_1 - r_1^2) \right] + \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{\pi^2 \mu_0 w_2^2 H}{2a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k2}}{n B_0} [b_{k2}/(a_2 b_2)] [r_4 P_3 D_7 - r_3 P_4 D_6 - B_0 F_{04}/n] - \\
 &- \frac{\pi^2 \mu_0 w_2^2 H}{2a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k2}}{n B_0} [P_4 b_{k1}/(a_1 b_1)] (r_2 D_1 - r_1 D_3).
 \end{aligned}$$

Відповідно, індуктивність короткого замикання для випадку $r_1 < r_2 \leq r_3 < r_4$

$$L_k = L_{\sigma 1} + L'_{\sigma 2} = L_{\sigma 1} + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 L_{\sigma 2} = \frac{\pi \mu_0 w_1^2}{6H} \left[(r_4 + r_3)^2 - (r_2 + r_1)^2 + 2(r_3^2 - r_2^2) \right] + \quad (8)$$

$$+ \frac{\pi^2 \mu_0 w_1^2 H}{2a_1 b_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k1}}{n B_0} \{ [b_{k1}/(a_1 b_1)] [r_2 P_1 D_2 - r_1 P_2 D_3 - B_0 F_{01}/n] - [P_1 b_{k2}/(a_2 b_2)] (r_4 D_7 - r_3 D_8) \} +$$

$$+ \frac{\pi^2 \mu_0 w_1^2 H}{2a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k2}}{n B_0} \{ [b_{k2}/(a_2 b_2)] [r_4 P_3 D_7 - r_3 P_4 D_6 - B_0 F_{04}/n] - [P_4 b_{k1}/(a_1 b_1)] (r_2 D_1 - r_1 D_3) \}.$$

Отже, отримані вирази дають змогу дослідити вплив геометричних розмірів і взаємного розміщення обмоток, а також розмірів і властивостей елементів екрана на власні та взаємні індуктивності, індуктивності розсіяння і короткого замикання циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді. Якщо висота обмоток дорівнює висоті екрана ($b_1 = b_2 = H$), то гармонічних складових нема і головні складові параметрів для феромагнітних екранів стають точними результатами.

1. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Л.: Энергия, 1970.
2. Скоклюк М.І., Яцун А.М., Яцун М.А. Власна і взаємна індуктивності циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді // Вісн. ДУ "Львів. політехніка". 1997. № 301. С. 94–102.
3. Яцун М.А., Яцун А.М. Власна і взаємна індуктивності розсіяння циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді // Вісн. НУ "Львів. політехніка". 2000. № 400. С. 158–164.
4. Яцун М.А., Яцун А.М. Основні складові власної і взаємної індуктивностей, індуктивностей розсіяння і короткого замикання циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді // Вісн. НУ "Львів. політехніка". 2006. № 563. С. 187–193.

**VECTOR POTENTIAL OF THE MAGNETIC FIELD AND INDUCTANCES OF
DISPERSION AND SHORT CIRCUIT OF SCREEN CYLINDER ALIGN
WINDINGS ON FERROMAGNETIC TO THE CORE**

M. Yatsun, A. Yatsun*

*National University "Lviv Polytechnic"
Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine*

**Lviv State Agrarian University*

V. Velykogo Str., 1, Dublyany, Zhovkva Area, Lviv Region, 80381, Ukraine

Expressions are received for own and mutual inductances, inductances of dispersion and short circuit of cylinder align windings on ferromagnetic to the core depending on geometrical dimensions and mutual placing of windings, dimensions and properties of screen.

Key words: vector potential of the magnetic field, inductances of dispersion and short circuit, screen cylinder align windings, ferromagnetic core.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2006

Прийнята до друку 30.12.2006