ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2007. Вип. 59. С. 103-112 *2007. Is. 59. P. 103-112*

УДК 621.318.13

ВЕКТОРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАМАГНІЧУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АНІЗОТРОПНИХ БЕЗГІСТЕРЕЗИСНИХ СЕРЕДОВИЩ

Ж. Рожненко, С. Толмачов

Криворізький технічний університет,
вул. XXII Партз'їзду, 11, Кривий Ріг 50027, Україна
e-mail: kafEM@.mail.ru

Розглянуто питання побудови векторних матеріальних рівнянь феромагніт них середовищ у безгістерезисному наближенні. Сформульовано загальні принципи побудови математичних моделей таких матеріалів з використанням енергетичних потенціалів. Проілюстровано ефективність використання в разі інтегрального принципу взаємності. Визначено клас магнітних матеріалів, для побудови векторних характеристик намагнічування яких є ефективним застосування теорії опуклих функцій. Наведено приклади побудови математичних моделей намагнічування нелінійних анізотропних матеріалів.

Ключові слова: матеріальні рівняння, нелінійна анізотропія, векторна модель намагнічування, опуклі функції, інтегральний принцип взаємності.

Важливою складовою моделювання електротехнічних задач у польовому формулюванні є розробка способів максимально повного врахування магнітних характеристик матеріалів. Відсутність чітко сформульованих універсальних закономірностей оборотних процесів намагнічування нелінійних анізотропних матеріалів стримує розвиток методів розробки їхніх математичних моделей. Сучасний стан проблеми характеризують різноманіття підходів до побудови матеріальних рівнянь, суперечність трактування експериментальних результатів, недостатньо чіткі уявлення про обсяги і способи отримання мінімально необхідної довідкової інформації для відновлення повної векторної характеристики намагнічування. Сьогодні нема не тільки чіткої теорії і методології побудови матеріальних рівнянь, а й чіткого термінологічного визначення проблеми. Наприклад, у статтях [6, 7] на підставі термодинамічної теорії зроблено висновок, що в загальному випадку матеріальне рівняння не є аналогом рівняння стану середовища, хоча в деяких авторитетних джерелах [1, с. 253] ці поняття розглядають як тотожні.

Поширеною є думка про недостатність довідкової інформації для врахування нелінійної анізотропії. Інколи вона задана у вигляді кутових залежностей $B(H, \alpha)$ або $H(B, \alpha)$, де α – кут між векторами H і B та головною віссю анізотропії, відповідно. Очевидно, в цьому разі може йтися тільки про поздовжні характеристики намагнічування $B||=F(H, \alpha)$ або $H||=F(B, \alpha)$. Тому багато досліджень спрямовано на поповнення цієї інформації, наприклад, кутовими залежностями $\psi=F(\alpha, B)$ [4], або $\psi=F(\alpha, H)$ [12], де ψ – кут між векторами B і H. Проте, як з'ясуємо далі, ця інформація не є необхідною для відтворення векторних характеристик намагнічування на підставі поздовжніх. Водночас відсутність одностайності в трактуванні довідкових поздовжніх характеристик призводить до нееквівалентності векторних характеристик $H(B)$ і $B(H)$, побудованих на їхній підставі. Отже, відсутність чіткого визначення довідкової інформації може бути джерелом суттєвої похибки.

Деякі закономірності намагнічування феромагнетиків у безгістерезисному наближенні розглянуті в працях Е.В. Колесникова [5] і Р.В. Фільца [16], які одними з перших застосували енергетичні потенціали для визначення векторної математичної моделі намагнічування $H(B)$. Питання математичного опису й експериментального дослідження векторних характеристик намагнічування анізотропних листових електротехнічних сталей проаналізовані в працях Є.В. Калініна [4], А.В. Сидельникова [12], В.В. Дружиніна [3], Л.І. Дорожко [2]. Проблемі побудови матеріальних рівнянь магнітних середовищ присвячено значну увагу в циклі публікацій [11, 13–15, 18], де розглянуто загальні властивості не тільки суцільних, а й упорядкованих гетерогенних середовищ.

Однак, незважаючи на щораз більший інтерес до цієї проблеми, в ній багато невирішених питань. Зокрема, поза межами дослідження є проблема коректного опису тривимірної залежності $B(H)$. Не визначене питання мінімального обсягу довідкової інформації для відтворення векторної математичної моделі. Актуальне також визначення способів формування математичних моделей у вигляді, придатному для безпосереднього використання в комплексі з рівняннями Максвелла.

Термодинамічні потенціали й обмеження. Сьогодні загальноприйнятою базою для побудови матеріальних рівнянь уважають закони й обмеження термодинаміки [6, 7, 9, 17], відповідно до яких механічні, магнітні й теплові властивості матеріалів треба враховувати спільно. Якщо як вектор незалежних змінних прийняти (σ_{ij}, H_i, T) ≡ (компоненти тензора напружень, компоненти вектора напруженості магнітного поля, абсолютна температура), а як залежні $(\varepsilon_{ij}, B_i, S)$ ≡ (компоненти тензора деформацій, компоненти вектора магнітної індукції, ентропія), то з урахуванням законів термодинаміки

$$\left.\begin{aligned} &-\dot{U}+T\dot{S}+\mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}+\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\geq 0;\\ &-\dot{F}+\dot{T}S+\mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}+\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\geq 0;\\ &-\dot{\Psi}+\dot{T}S+\dot{\mathbf{H}}\mathbf{B}+\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\geq 0;\\ &-\dot{\Phi}+\dot{T}S+\mu_0\dot{\mathbf{H}}\mathbf{J}+\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\geq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

де U – щільність внутрішньої енергії; $T>0$ – абсолютна температура; S – щільність ентропії; Ψ, Φ і F – термодинамічні функції; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензори напружень і деформацій, а знак рівності стосується середовищ з оборотними властивостями, у припущенні ізотермічних процесів намагнічування в механічно затисненому стані кристалів (T = const, $\boldsymbol{\varepsilon}$ = const)

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{H} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{H}(\mathbf{B}) = -\operatorname{grad}_{\mathbf{B}} F(\mathbf{B}) = -\nabla_{\mathbf{B}} F; \\
&\mu_0 \mathbf{J} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{H}} = \mathbf{J}(\mathbf{H}) = -\operatorname{grad}_{\mathbf{H}} \Phi(\mathbf{H}) = -\nabla_{\mathbf{H}} \Phi; \\
&\mathbf{B} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{H}} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) = -\operatorname{grad}_{\mathbf{H}} \Psi(\mathbf{H}) = -\nabla_{\mathbf{H}} \Psi.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Наслідком цих співвідношень є симетрія тензора μ_∂

$$\mu_\partial = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{H}^2}\right)_{\varepsilon, T}; \; \mu_{\partial ij} = -\frac{\partial B_i}{\partial H_j} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i \cdot \partial H_j} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_j \cdot \partial H_i} = \mu_{\partial ji}, \tag{3}$$

а також тензорів магнітної сприйнятливості $\chi_\partial = \mu_\partial - \mathbf{I}$ і магнітної провідності $\upsilon_\partial = \mu_\partial^{-1}$. Ці рівності еквівалентні умовам потенціальності векторів **B** і **J** у **H**-просторі й вектора **H** у **B**-просторі:

$$\oint_{\mathbf{H}} \mathbf{B} d\mathbf{H} = 0, \quad \oint_{\mathbf{H}} \mathbf{J} d\mathbf{H} = 0, \quad \oint_{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

За певних умов (передусім без просторової дисперсії [6, 7]) термодинамічні потенціали досягають за стійкої теплової рівноваги мінімуму щодо різних змін стану середовища. Математичним виразом цієї властивості є нерівності

$$(d\mathbf{B}, d\mathbf{H}) = (\mu_\partial d\mathbf{H}, d\mathbf{H}) > 0; (d\mathbf{H}, d\mathbf{B}) = (\nu_\partial d\mathbf{B}, d\mathbf{B}) > 0; (d\mathbf{J}, d\mathbf{H}) = (\chi_\partial d\mathbf{H}, d\mathbf{H}) \geq 0, \tag{5}$$

які використовують для побудови векторних характеристик намагнічування широкого класу феромагнітних матеріалів з нелінійною анізотропією.

Матеріальне рівняння магнітного середовища залежить від умов експерименту. Наприклад, у припущенні ізотермічних процесів намагнічування в механічно вільному стані кристалів (σ = const) для потенціалу

$$\tilde{\Phi} = U - TS - \boldsymbol{\sigma\varepsilon} - \mathbf{BH} + \mu_0 \frac{H^2}{2}$$

$$\mu_0 \tilde{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{H}} = \Im(\mathbf{H}) = -\operatorname{grad}_{\mathbf{H}} \tilde{\Phi}(\mathbf{H}) = -\nabla_{\mathbf{H}} \tilde{\Phi}. \tag{6}$$

Як показано в [9], матеріальні рівняння (2) і (6) можуть відрізнятися. Проте зазначимо, що на практиці умови (T = const, ε = const) або (T = const, σ = const) забезпечити практично неможливо, оскільки існує складний взаємозв’язок між внутрішніми й зовнішніми напруженнями в кристалах і їхніми деформаціями внаслідок механострикції, магнітопружних ефектів, кристалографічної і штучної анізотропії (текстури), полікристалічної структури реальних матеріалів тощо. Іншими словами, змінні (σ, H, T) не є незалежними (наприклад, магнітострикція і відповідні магнітопружні деформації залежать від магнітного поля). Побудова дійсних залежностей для термодинамічних потенціалів є одним з головних завдань статистичної фізики, яке поки що далеке від практичного вирішення. Водночас для оборотних процесів можна сформулювати низку універсальних закономірностей у разі побудови векторних характеристик намагнічування.

Інтегральний принцип взаємності (ІПВ) є фундаментальною властивістю анізотропного середовища без гістерезису [11, 14]. Він є безпосереднім наслідком співвідношень потенціальності (4). Для характеристик намагнічування **B**(**H**) диференціальна форма принципу взаємності задана співвідношенням (3). Проте для практичних застосувань корисніша його інтегральна форма. Для випадку двох змінних у декартовій системі координат [15] **B**=(B_1, B_2), **H**=(H_1, H_2), **J**=(J_1, J_2) виконується енергетичне співвідношення I_1=I_2, де

$$I_1=\oint\limits_{\mathbf{H}} B_1 dH_1=\int\limits_{H_1'}^{H_1''}[B_1(H_1,H_2')-B_1(H_1,H_2'')]dH_1=\int\limits_{H_1'}^{H_1''}[J_1(H_1,H_2')-J_1(H_1,H_2'')]dH_1, \quad (7)$$

$$I_2=\oint\limits_{\mathbf{H}} B_2 dH_2=\int\limits_{H_2'}^{H_2''}[B_2(H_1',H_2)-B_2(H_1'',H_2)]dH_2=\int\limits_{H_2'}^{H_2''}[J_2(H_1',H_2)-J_2(H_1'',H_2)]dH_2. \quad (8)$$

Для полярної системи координат **H**=(H, β), **B**=$\mathbf{B}_{\|}(H, \beta)+\mathbf{B}_{\perp}(H, \beta)$ з умов потенціальності (4) випливає $\dfrac{\partial(H\cdot B_{\perp})}{\partial H}=\dfrac{\partial B_{\|}}{\partial H}$ і, як наслідок,

$$I_1=\int\limits_{H'}^{H''}[B_{\|}(H,\beta')-B_{\|}(H,\beta'')]\,dH=I_2=\int\limits_{\beta'}^{\beta''}[B_{\perp}(H',\beta)H'-B_{\perp}(H'',\beta)H'']\,d\beta, \quad (9)$$

де $H'\le H\le H''$, $\beta'\le\beta\le\beta''$.

Аналогічні вирази можна отримати для характеристик $J(H)$ і $H(B)$.

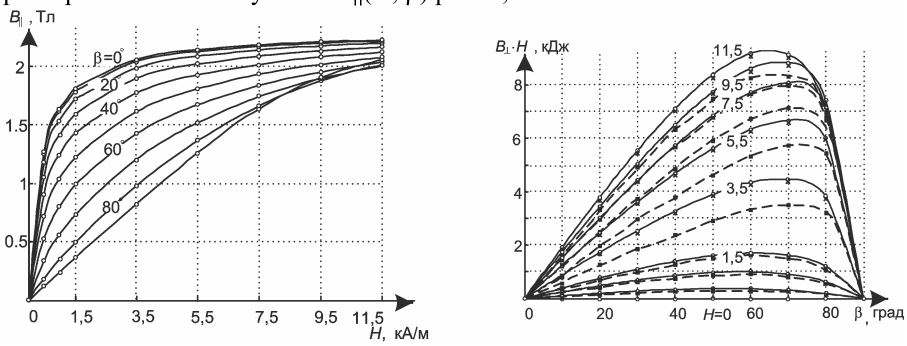
Узагальнення ІПВ на тривимірний випадок декартових координат наведено в статті [18].

Для феромагнітних матеріалів виконуються співвідношення

$$\mathbf{J}(-\mathbf{H})=-\mathbf{J}(\mathbf{H}),\quad \mathbf{J}(0)=0,\quad \lim_{H\to\infty}\mathbf{J}(\mathbf{H})=J_S\cdot\mathbf{H}/H, \quad (10)$$

з урахуванням яких на підставі інтегрального принципу взаємності сформульовані асимптотичні властивості характеристик намагнічування безгістерезисних матеріалів [15]. Їхнє використання дає змогу зробити важливий теоретично і практично висновок, що відтворення векторної характеристики намагнічування середовища з нелінійними анізотропними властивостями можливе щодо ряду характеристик тільки для однієї складової базового вектора магнітного поля. Цим обґрунтований мінімальний обсяг вихідної інформації, достатньої для побудови векторної моделі магнітного стану.

Приклад використання ІПВ для побудови векторної характеристики намагнічування на підставі базових поздовжніх характеристик $B\|(H, \beta)$ відображено на рис. 1. Суцільними лініями на рис. 1 показані точні характеристики, розраховані аналітично для шихтованої анізотропної сталі [14], а символом «о» – вузли дискретизації. На рис. 1, *б* символами «■» і «х» позначені точки, розраховані на підставі ІПВ з використанням методу трапецій та модифікованого методу сплайнів, відповідно. Характеристики рис. 1, *б* отримані на підставі характеристик намагнічування $B\|(H, \beta)$ рис. 1, *а*.



а *б*

Рис. 1. Характеристики намагнічування: *а* – для паралельної складової магнітної індукції $B_{\|}$ (H, β); *б* – для енергетичного добутку $B_{\perp}{\cdot}H$ (H, β).

Матеріальні рівняння на підставі енергетичних потенціалів. Альтернативним методом побудови векторних характеристик намагнічування є використання енергетичних потенціалів. Для їхньої побудови застосовують незалежність відповідних потенціалів від шляху інтегрування в **H**- або **B**-просторах. Наприклад, для векторної моделі **B**(**H**) у полярній системі координат потенціал Ψ у “точці” $\mathbf{H}^* = (H^*, \beta^*)$

$$-\Psi(\mathbf{H}^*) = \Psi(0) + \int_0^{\mathbf{H}^*} B_{\|}(H, \beta^*)\, dH. \tag{11}$$

Для декартової системи координат

$$-\Psi(\mathbf{H}^*) = \Psi(0) + \int_0^{H_2^*} B_2(0, H_2)\, dH_2 + \int_0^{H_1^*} B_1(H_1, H_2^*)\, dH_1 \tag{12}$$

або

$$-\Psi(\mathbf{H}^*) = \Psi(0) + \int_0^{\infty} B_1(H_1, 0)\, dH_1 - \int_{H_1^*}^{\infty} B_1(H_1, H_2^*)\, dH_1\,. \tag{13}$$

Узагальнення цих виразів на тривимірний випадок декартових координат наведено в [15]. Формули (11)–(13) та їхні тривимірні аналоги є універсальними і можуть бути застосовані для побудови векторних матеріальних рівнянь з використанням як аналітичних, так і експериментальних базових характеристик намагнічування.

Ефективний метод побудови векторних моделей намагнічування для матеріалів без вираженої дисперсії можна реалізувати на підставі опуклих функцій. Для таких матеріалів термодинамічні умови стійкості можна сформулювати у вигляді співвідношень (5). У цьому разі позитивно визначеному тензору $\mu\partial$ відповідає позитивно визначена квадратична форма і позитивно визначена матриця $\mu\partial=\{\mu\partial_{ij}\}$. З іншого боку, дійсна функція $-\Psi(H)$, що двічі диференційована, з позитивним гесіаном $\tilde{A}_{\Psi}(H_1, H_2, H_3) = \sum_{i=1}^{3} \mu_{ij} H_i H_j > 0$ є строго опуклою. Для векторної характеристики $J(H)$ відповідний потенціал – $\Phi(H)$ опуклий.

Перевага використання опуклих функцій, на відміну від співвідношень (11)–(13), полягає в можливості безпосереднього формування аналітичних виразів для потенціалів та векторних характеристик намагнічування. Властивості опуклих функцій дають змогу порівняно просто конструювати складні опуклі функції на базі простих [9, 18].

Як приклад, розглянемо функцію $\Phi(\mathbf{H}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i [f_i(\mathbf{H})]$, де

$$\Phi_i = -d_i[f_i - A_i \ln(A_i + f_i)], \quad f_i = \left(\sum_{j=1}^{n} (a_i - b_{ij} \exp(-c_{ij} H_j)) H_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

У цьому випадку

$$\mathbf{J}(\mathbf{H}) = -\nabla\Phi(\mathbf{H}) = \sum_{i=1}^{m} [\frac{\lambda_i d_i}{f_i}(1 - \frac{A_i}{A_i + f_i}) \sum_{j=1}^{n} H_j (b_{ij} c_{ij} \exp(-c_{ij} H_j) H_j^2 +$$
$$+ 2H_j (a_i - b_{ij}) \exp(-c_{ij} H_j))]. \tag{15}$$

Легко довести, що в разі виконання умови $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_i \sqrt{a_i} = J_S$ асимптотична умова (10) виконується. Коефіцієнти λ_i, d_i, A_i, a_i, b_{ij}, c_{ij}, m можна вибирати за умов найліпшого наближення математичної моделі і реального середовища, забезпечуючи опуклість функції $\Phi(H)$. На рис. 2 зображено функції $\Phi(H)$, розраховані за виразом (14) для значень коефіцієнтів: m=1; $\lambda1$=1,2; $d1$=1,5; $A1$=0,1; $a1$=1; $b11$=0,0002; $b21$=0,99; $b31$=0,002; $c11$=0,95; $c21$=0,009; $c31$=0,5. З рис. 2 видно опуклість функції Ф, а також її специфічну деформацію по координатних осях, що є проявом тривісної анізотропії.

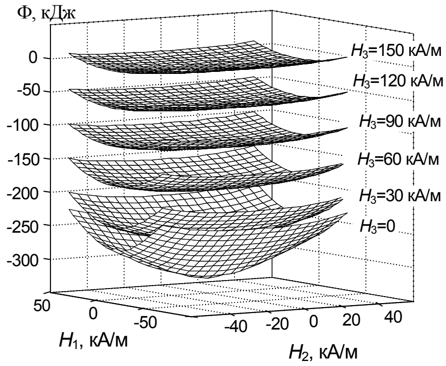


Рис. 2. Тривимірна векторна модель намагнічування, задана опуклим енергетичним потенціалом.

Векторні характеристики намагнічування холоднокатаних електротехнічних сталей. Важливим класом нелінійних анізотропних матеріалів є холоднокатані електротехнічні сталі (ЕТС). Інтерес до математичного моделювання їхніх магнітних характеристик пояснюють широким застосуванням листових холоднокатаних ЕТС з ребровою текстурою і поліпшеними магнітними властивостями в різних галузях науки і техніки. Необхідність підвищення точності розрахунку електромагнітних систем з використанням ЕОМ стимулювала дослідження з розробки векторних характеристик намагнічування таких ЕТС [2–5, 12–16].

Особливістю цих сталей є зміна напряму осі важкого намагнічування від 90° до напряму прокатки у зоні слабкого поля до 55° за середніх і високих рівнів напруженості. Експериментальні дослідження різних авторів свідчать про локальне порушення опуклості потенціалів і, отже, невиконання умов (5). Проте ця обставина не суперечить законам оборотних процесів намагнічування і може бути пояснена складним характером механомагнітних взаємодій у текстурованих матеріалах, що є специфічним проявом просторової дисперсії.

Деякі додаткові особливості побудови векторних характеристик намагнічування холоднокатаних ЕТС розглянемо на прикладі холоднокатаної сталі марки 3405 [8] (рис. 3).

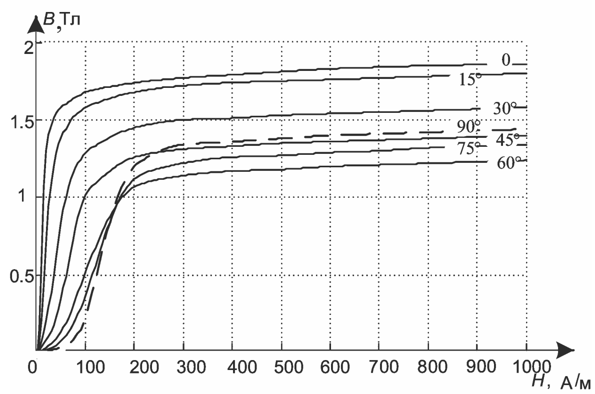
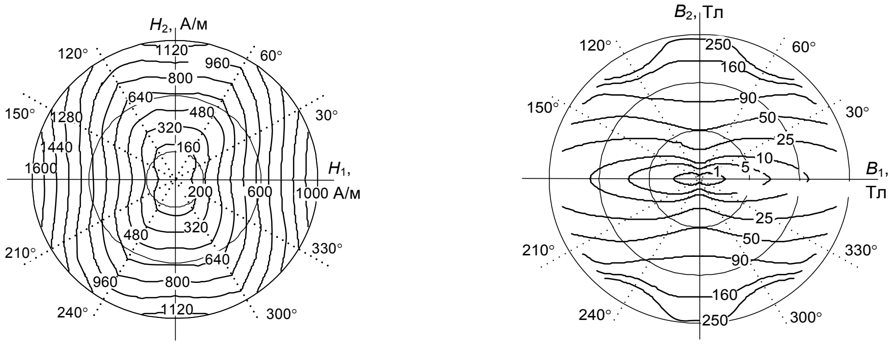


Рис. 3. Характеристики намагнічування холоднокатаної сталі марки 3405 під різними кутами до напряму прокатки.

Принциповим є трактування довідкових характеристик, які можуть мати взаємовиключні тлумачення: $B\|=F(H, \alpha)$ або $H\|=F(B, \alpha)$, де α – кут між напрямом прокатки і вектором H або B. Невизначеність довідкової інформації створює певні перешкоди у формуванні векторної характеристики намагнічування. На рис. 4 показані еквіпотенціали, отримані інтегруванням у «радіальному» напрямі поздовжніх характеристик, відповідно, в H- або B-просторі. Еквіпотенціали $\Psi(H)=\text{const}$, зображені на рис. 4, *а*, відповідають припущенню, що на рис. 3 відтворені залежності $B\|=F(H, \alpha)$. Еквіпотенціали $F(B)=\text{const}$, що відповідають залежностям $H\|=F(B, \alpha)$, зображені на рис. 4, *б*. Розрахунки засвідчують, що отримані диференціюванням потенціалів $\Psi(H)$ або $F(B)$ векторні характеристики $B(H)$ або $H(B)$ неадекватні, причому їхня відмінність може бути значною.



а *б*

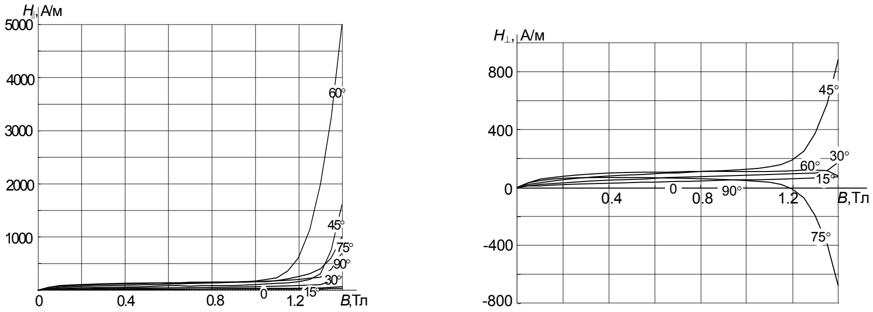
Рис. 4. Еквіпотенціали функцій, розраховані на підставі експериментальних характеристик намагнічування рис. 3: *а* – $\Psi(\mathbf{H})$; *б* – $F(\mathbf{B})$ для ЕТС 3405.

Критичний аналіз різних підходів до побудови векторної моделі намагнічування холоднокатаних ЕТС, комплексна оцінка чинників, пов'язаних з отриманням та опрацюванням експериментальної інформації, її універсальністю і простотою практичного використання, надійністю й достовірністю розрахункових дає підстави запропонувати такий алгоритм побудови цієї моделі:

- як базовий розглядають ряд довідкових характеристик поздовжнього намагнічування $H_{\|}(B, \alpha)$;
- після перетворення цих даних у табличну форму виконують їхнє згладжування і кубічну інтерполяцію: $H_{\|}(B, \alpha) \rightarrow H'_{\|}(B, \alpha)$;
- шляхом числового інтегрування характеристик $H'_{\|}(B, \alpha)$ розраховують потенціальну функція $F(\mathbf{B})$;
- шляхом числового диференціювання визначають характеристики поздовжнього $H_{\|}(B, \alpha)$ і поперечного $H_{\perp}(B, \alpha)$ намагнічування.

Наведений алгоритм реалізований у вигляді програми "MODEL", розробленої в середовищі MATLAB, яку легко адаптувати до різних методів числового моделювання польових задач у складних системах з нелінійними анізотропними властивостями елементів.

Приклад застосування програми "MODEL" показаний на рис. 5.



а *б*

Рис. 5. Характеристики намагнічування ЕТС 3405: *а* – $H_{\|}(B, \alpha)$; *б* – $H_{\perp}(B, \alpha)$.

Аналіз науково-технічної літератури засвідчує, що сьогодні нема завершеної теорії побудови векторних характеристик намагнічування нелінійних анізотропних матеріалів з оборотними властивостями.

За допомогою інтегрального принципу взаємності доведено, що відтворення векторної характеристики намагнічування середовища з нелінійними анізотропними властивостями можливе за характеристиками тільки для однієї складової базового вектора магнітного поля. Так обґрунтовано мінімальний обсяг вихідної інформації, достатньої для побудови векторної моделі магнітного стану.

Побудову векторної моделі нелінійного анізотропного середовища можна реалізувати або безпосереднім застосуванням інтегрального принципу взаємності, або шляхом розрахунку енергетичного потенціалу і його диференціюванням у *H*- або *B*-просторі. Для матеріалів зі слабко вираженою дисперсією ефективним є використання опуклих функцій.

---

1. Большая советская энциклопедия: 3-е изд. М.: Сов. энциклопедия, 1974. Т. 15. 632 с.
2. *Дорожко Л.И.* Характеристики анизотропной стали под разными углами к направлению прокатки // Электричество. 1972. № 3. С. 88–90.
3. *Дружинин В.В., Куренных Л.К., Чистяков В.К.* Исследование характеристик холоднокатаной электротехнической стали под разными углами к направлению прокатки // Электричество. 1971. № 3. С. 85–86.
4. *Калинин Е.В.* Экспериментальное исследование и математическое описание векторных характеристик намагничивания анизотропных листовых электротехнических сталей // Электротехника. 2000. № 2. С. 50–54.
5. *Колесников Э.В., Ткачев А.Н., Горбунцов А.Ф.* Экспериментальное исследование и математическое моделирование планарного перемагничивания холоднокатаной стали // Изв. вузов. Электромеханика. 1983. № 6. С. 23–30.
6. *Микаэлян М.А.* Методические вопросы термодинамики диэлектриков //Успехи физ. наук. 1998. Т. 168. № 12. С. 1331–1339.
7. *Микаэлян М.А.* Термодинамические неравенства для магнитной проницаемости вещества // Краткие сообщения по физике. Физ. ин-т им. П.Н. Лебедева. 2002. № 9. С. 33–45.
8. *Молотилов Б.В.* Холоднокатаные электротехнические стали: Справочник. М.: Металлургия, 1989. 168 с.
9. *Най Д.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Мир, 1967. 304 с.
10. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
11. *Рожненко Ж.Г., Толмачев С.Т.* Интегральный принцип взаимности в теории и практике определяющих уравнений нелинейной анизотропной среды // Техн. електродинаміка. 2005. № 1. С. 3–8.
12. *Сидельников А.В.* Способы описания магнитных свойств анизотропной безгистерезисной стали при расчетах электромагнитных полей // Электротехника. 1989. № 4. С. 65–68.
13. *Толмачев С.Т.* Специальные методы решения задач магнитостатики. К.: Вища шк., 1983. 166 с.

14. *Толмачев С.Т., Рожненко Ж.Г.* Принцип взаимности для магнитной среды без гистерезиса // Электричество. 1992. № 12. С. 51–53.
15. *Толмачев С.Т., Рожненко Ж.Г.* Универсальные свойства кривых намагничивания безгистерезисной среды // Вісн. Кременчуц. політехн. ун-ту. 2004. № 5. С. 8–12.
16. *Фильц Р.В., Ком Я.М.* Об аппроксимации характеристик ферромагнитных анизотропных безгистерезисных материалов при трехмерном намагничивании // Теор. электротехника. 1984. № 37. С. 100–107.
17. *Coleman B.D., Dill E.H.* Thermodynamic Restrictions on the Constitutive Equations of Electromagnetic Theory // Zeitschrift fur angewandte Mathematic und Physic (ZAMP). 1971. Vol. 22. N 4. P. 691–702.
18. *Tolmachev S., Rozhnenko Z.* The Theory of the Defining Equations for Nonlinear Anisotropic Materials // Proceedings of the XIII International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET'05. 2005. P. 97–100.

VECTORIAL CHARACTERISTICS OF MAGNETIZING OF NONLINEAR ANISOTROPIC ANHYSTERETIC MEDIUMS

Z. Rozhnenko, S. Tolmachev

Kryvyi Rih Technical University
XXII Partzizda Str., 11, Kryvyi Rih 50027, Ukraine
e-mail:kafEM@mail.ru

The question of construction of vector material equalizations of ferromagnetic mediums is considered in the anhysteretic approximation. General principles of forming of mathematical models of such materials are formulated with the use of power potentials. Efficiency of the use of integral principle of reciprocity is illustrated. Class of magnetic materials is considered, for the construction of vectorial characteristics of magnetizing of which, application of theory of protuberant functions is effective. The examples of construction of mathematical models of magnetizing of nonlinear anisotropic materials are resulted.

Key words: material equalizations, nonlinear anisotropy, vectorial model of magnetizing, protuberant functions, integral principle of reciprocity.

Стаття надійшла до редколегії 02.09.2007
Прийнята до друку 31.10.2007