УДК 621.313.32

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ЧАСТИНА 1

М. Говикович, Р. Фільц

Національний університет “*Львівська політехніка*”
вул. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна
e-mail howykowycz@ieee.org

Запропоновано вираз енергетичного функціонала для формулювання варіаційної задачі аналізу електромагнітного поля у вигляді повного виразу енергії середовища, розташованого в електромагнітному полі. З'ясовано, що функції, які задовольняють перше та третє рівняння Максвела, забезпечують мінімізацію цього функціонала. Отримано часткові вирази енергетичних функціоналів для задач електростатики, магнітостатики та стаціонарного електричного поля постійних струмів.

Ключові слова: варіаційна задача, енергетичний функціонал, рівняння Максвела, повна енергія, електромагнітне поле.

Варіаційне формулювання задачі математичної фізики у вигляді мінімізації енергетичного функціонала. У загальному випадку задача математичної фізики може бути сформульована в операторній формі [3]

$$u \in D_A; \quad f \in H\,, \tag{1}$$

де A – лінійний оператор з областю визначення D_A, щільною в гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (,) та нормою $\| \ \|$; f – задана функція, визначена на відкритій обмеженій множині Ω точок $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ евклідового простору $\Re^n$ з неперервною за Лівшицем границею Γ; u – шукана функція, визначена на замиканні $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Нагадаємо, що гільбертовим простором H називають унітарний простір зі скалярним добутком тоді й лише тоді, коли він повний щодо норми, визначеної за цим скалярним добутком [1].

Приймемо умову, що оператор A є додатним симетричним оператором. Тоді виконується така теорема, доведення якої можна знайти в [4].

Теорема. Для того, щоб деякий елемент $u_0 \in D_A$ надавав мінімального значення функціонала енергії

$$F(u) = [u, u] - 2(u, f) \tag{2}$$

на множині D_A, необхідно і достатньо, щоб цей елемент задовольняв рівняння $Au_0 = f$. Такий елемент є єдиним.

Ця теорема доводить еквівалентність задачі (1) та задачі знаходження мінімуму функціонала (2), однак вона не гарантує існування такого $u_0 \in D_A$, який був би розв'язком задачі (1). Отож, у методі Рітца запропоновано шукати розв'язок сформульованої задачі в розширеному, так званому енергетичному гільбертовому просторі H_A, породженому оператором А. Цей розв'язок названо узагальненим, на противагу класичному, який шукають у D_A. Перш за все визначають новий скалярний добуток і нову норму у вигляді

$$[u,v]=(Au,v); \quad v \in D_A; \qquad \|u\|_A=[u,u]^{1/2}=(Au,u)^{1/2}. \quad (3)$$

Додатна визначеність оператора А дає нерівність

$$(Au,u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad (4)$$

де γ^2 – стала. Множину D_A поповнюємо її граничними елементами Γ_A, утворюючи гільбертовий простір $H_A = D_A \cup \Gamma_A$, названий енергетичним.

Існування єдиного розв'язку в енергетичному просторі легко довести так.

По-перше, оскільки оператор А вважають додатно визначеним для $u_0 \in D_A$, то в разі поповнення D_A до H_A співвідношення $[u,u] \geq \gamma^2 \|u\|^2$ залишається правильним для будь-якого $u \in H_A$. У результаті функціонал (u,f) є обмеженим в H_A:

$$|(u,f)| \leq \|u\| \cdot \|f\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma}\|u\|_A \equiv C\|u\|_A, \qquad u \in H_A, \quad (4)$$

де С – довільна додатна стала.

По-друге, обмеженість функціонала (u,f) дає змогу застосувати до нього теорему Рісса, яка доводить правильність тотожності

$$|(u,f)|=[u,u_0] \quad u \in H_A, \quad (5)$$

тобто можливість запису цього функціонала, що діє на елемент u, у вигляді скалярного добутку цього елемента на єдиний елемент u_0 енергетичного простору H_A.

По-третє, тотожність (5) дає змогу записати функціонал енергії у вигляді

$$F(u)=[u,u]-2[u,u_0]+[u_0,u_0]-[u_0,u_0]=[u-u_0,u-u_0]-[u_0,u_0]=$$
$$=\|u-u_0\|_A^2-\|u_0\|_A^2, \quad u \in H_A. \quad (6)$$

На підставі формули (6) робимо висновок, що функціонал $F(u)$ набуває мінімального значення при $u=u_0$. Якщо елемент u_0 належить не тільки енергетичному просторові H_A, а також області визначення D_A оператора А, то такий узагальнений розв'язок є водночас класичним.

Застосуємо ці загальні положення варіаційного числення до задачі аналізу електромагнітного поля.

Прийняті припущення. З'ясуємо, чи повний вираз енергії анізотропного нелінійного неоднорідного гістерезисного середовища об'ємом V, розташованого в електромагнітному полі, можна використати як енергетичний функціонал для формулювання варіаційної задачі аналізу електромагнітного поля. Запишемо вираз енергії, прийнявши такі припущення:

А) в середовищі не виконується механічна робота з переміщення заряджених провідних тіл, провідних контурів зі струмами чи частин середовища;

Б) значення диференційних характеристик електромагнітного поля у довільній точці на межі середовища (тобто на поверхні S, що обмежує об'єм V вважаємо заданими;

В) значення диференційних характеристик електромагнітного поля у довільній точці на межі середовища в початковий момент часу $t = t_0$ вважаємо заданими;

Г) значення енергії в початковий момент часу $t = t_0$ вважаємо таким, що дорівнює нулю.

Нагадаємо, що таку крайову задачу називають змішаною, оскільки для неї задано як граничні, так і початкові умови.

Виведення виразу енергії для формулювання варіаційної задачі аналізу електромагнітного поля. За прийнятих припущень вираз енергії складається з трьох частин: енергії електричного поля, енергії магнітного поля і роботи, витраченої на переміщення заряджених частинок (завдяки ділянкам зі скінченною електричною провідністю та вільних зарядів). Нехай у момент часу $t = t_0$ вектор електричного зміщення довільної точки розглянутого середовища $\overline{D}(t = t_0) = \overline{D}_0\left[x, y, z\right]$ і вектор магнітної індукції $\overline{B}(t = t_0) = \overline{B}_0\left[x, y, z\right]$.

Запишемо такий вираз енергії для довільного моменту часу $t > t_0$:

$$W = W_e + W_m + W_t = \int\limits_V dV \int\limits_{\overline{D}_0}^{\overline{D}} \overline{E} d\overline{D} + \int\limits_V dV \int\limits_{\overline{B}_0}^{\overline{B}} \overline{H} d\overline{B} + \int\limits_{t_0}^{t} dt \int\limits_V \overline{E}\overline{J} dV, \tag{7}$$

де W – енергія в момент часу t; $\overline{E} = \overline{E}[x, y, z, t]$ – вектор напруженості електричного поля в довільній точці розглянутого середовища; $\overline{H} = \overline{H}[x, y, z, t]$ – вектор напруженості магнітного поля; $\overline{J} = \overline{J}[x, y, z, t]$ – вектор густини електричного струму, що складається зі струму провідності й струму перенесення. Треба також пам'ятати, що диференціали $d\overline{D}$ та $d\overline{B}$ в підінтегральних виразах не є повними диференціалами – вони характеризують нескінченно малі зміни $\overline{D}$ та $\overline{B}$ в часі.

Перший доданок виразу (7) є енергією електричного поля; ми можемо переписати його у вигляді

$$W_e = \int\limits_V dV \int\limits_{\overline{D}_0}^{\overline{D}} \overline{E} d\overline{D} = -\int\limits_V dV \int\limits_{\overline{D}_0}^{\overline{D}} \partial\overline{A}/\partial t \cdot d\overline{D} - \int\limits_V dV \int\limits_{\overline{D}_0}^{\overline{D}} \mathrm{grad}\varphi \cdot d\overline{D}, \tag{8}$$

де $\overline{A} = \overline{A}[x, y, z, t]$ – векторний потенціал електромагнітного поля; $\varphi = \varphi[x, y, z, t]$ – скалярний потенціал електромагнітного поля.

Застосуємо формулу інтегрування частинами до другого доданка (8), запишемо вираз енергії електричного поля у вигляді

$$W_e = -\int_V dV \int_{\overline{D}_0}^{\overline{D}} \partial\overline{A}/\partial t \cdot d\overline{D} + \int_V dV \int_{\text{grad}\varphi_0}^{\text{grad}\varphi} \overline{D} \cdot d(\text{grad}\varphi) - \int_V \overline{D}\text{grad}\varphi dV + \int_V \overline{D}_0 \text{grad}\varphi_0 dV =$$

$$= -\int_V dV \int_{\overline{D}_0}^{\overline{D}} \partial\overline{A}/\partial t \cdot d\overline{D} + \int_V dV \int_{\text{grad}\varphi_0}^{\text{grad}\varphi} \overline{D} \cdot d(\text{grad}\varphi) - \int_V \overline{D}\text{grad}\varphi dV + C_1 , \tag{9}$$

де $\varphi_0 = \varphi_0[x, y, z]$ – скалярний потенціал електромагнітного поля в момент часу $t = t_0$ як задана функція координат; $C_1 = \int_V \overline{D}_0 \text{grad}\varphi_0 dV$ – стала, оскільки згідно з припущенням В функції $\overline{D}_0[x, y, z]$ та $\varphi_0[x, y, z]$ є заданими.

Третій доданок виразу (7) є роботою з переміщення заряджених частинок; використавши те, що інтегрування в часі й у просторі виконують незалежно, ми можемо переписати його у вигляді

$$W_t = \int_V dV \int_{t_0}^{t} \overline{E}\overline{J} dt = -\int_V dV \int_{t_0}^{t} \overline{J}\partial\overline{A}/\partial t \cdot dt - \int_V dV \int_{t_0}^{t} \overline{J}\text{grad}\varphi \cdot dt . \tag{10}$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами до другого доданка (10), запишемо вираз роботи у вигляді

$$W_t = -\int_V dV \int_{\overline{A}_0}^{\overline{A}} \overline{J} \cdot d\overline{A} + \int_V dV \int_{\text{grad}\varphi_0}^{\text{grad}\varphi} d(\text{grad}\varphi) \int_{t_0}^{t} \overline{J} dt -$$

$$-\int_V dV \cdot \text{grad}\varphi \int_{t_0}^{t} \overline{J} dt + \int_V dV \text{grad}\varphi_0 \int_{t_0 - 0}^{t_0 + 0} \overline{J} dt =$$

$$= \int_V dV \int_{\overline{A}_0}^{\overline{A}} \overline{J} d\overline{A} + \int_V dV \int_{\text{grad}\varphi_0}^{\text{grad}\varphi} d(\text{grad}\varphi) \int_{t_0}^{t} \overline{J} dt - \int_V dV \text{grad}\varphi \int_{t_0}^{t} \overline{J} dt + C_2 , \tag{11}$$

де $\overline{A}_0 = \overline{A}_0[x, y, z]$ – векторний потенціал електромагнітного поля в момент часу $t = t_0$ як задана функція координат; $C_2 = \int_V dV \cdot \text{grad}\varphi_0 \int_{t_0 - 0}^{t_0 + 0} \overline{J} dt$ – стала (оскільки всі величини, що характеризують електромагнітне поле в момент часу $t = t_0$, вважаємо заданими), яка не дорівнює нулю лише в тому випадку, коли маємо імпульс струму при $t = t_0$. Наголосимо на тому, що диференціал $d\overline{A}$ в підінтегральному виразі, не є повним диференціалом – він характеризує нескінченно малу зміну $\overline{A}$ лише в часі.

До третього доданка формули (11) застосуємо відому формулу векторного аналізу $\text{div}(\chi\overline{\text{X}}) = \chi\text{div}\overline{\text{X}} + \overline{\text{X}}\text{grand}\chi$ [2] (де χ – скалярна функція, $\overline{\text{X}}$ – векторна функція), тобто

$$\text{grad}\varphi \cdot \int_{t_0}^{t} \overline{J} dt = \text{div}(\varphi \cdot \int_{t_0}^{t} \overline{J} dt) - \varphi \cdot \text{div}(\int_{t_0}^{t} \overline{J} dt). \tag{12}$$

Оскільки в початкових припущеннях ми вилучили переміщення частин середовища, то можна внести символ просторового диференціювання під знак інтегрування за часом, тобто переписати (12) у вигляді

$$\mathrm{grad}\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt=\mathrm{div}(\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)-\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\mathrm{div}\bar{J}dt=\mathrm{div}(\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)+\varphi(\rho-\rho_0),\qquad(13)$$

де $\rho=\rho[x,y,z,t]$ – об’ємна густина електричного заряду; $\rho_0=\rho_0[x,y,z]$ – об’ємна густина електричного заряду в момент часу $t=t_0$ як задана функція координат. Урахувавши, що $\mathrm{div}\bar{D}=\rho$, отримаємо остаточний вираз роботи:

$$W_t=-\int_V dV\int_{\bar{A}_0}^{\bar{A}}\bar{J}\cdot d\bar{A}+\int_V dV\int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi}d(\mathrm{grad}\varphi)\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt-\int_V dV\cdot\mathrm{div}(\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)-$$
$$-\int_V\varphi\mathrm{div}\bar{D}dV+\int_V\varphi\rho_0\cdot dV+C_2.\qquad(14)$$

Запишемо повний вираз енергії з використанням (8), (9), (14) та замінимо позначення границь інтегрування векторним потенціалом у другому доданку, пам’ятаючи про те, що фактично інтегрування відбувається за часовою координатою від t_0 до t:

$$W=-\int_V dV\int_{\bar{A}_0}^{\bar{A}}\partial\bar{D}/\partial t\cdot d\bar{A}+\int_V dV\int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi}\bar{D}\cdot d(\mathrm{grad}\varphi)-\int_V\bar{D}\mathrm{grad}\varphi dV+C_1+\int_V dV\int_{\bar{B}_0}^{\bar{B}}\bar{H}d\bar{B}-$$
$$-\int_V dV\int_{\bar{A}_0}^{\bar{A}}\bar{J}\cdot d\bar{A}+\int_V dV\int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi}d(\mathrm{grad}\varphi)\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt-\int_V dV\cdot\mathrm{div}(\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)-\int_V\varphi\mathrm{div}\bar{D}dV+$$
$$+\int_V\varphi\rho_0 dV+C_2=\int_V dV\int_{\bar{B}_0}^{\bar{B}}\bar{H}d\bar{B}-\int_V dV\int_{\bar{A}_0}^{\bar{A}}(\partial\bar{D}/\partial t+\bar{J})\cdot d\bar{A}+\int_V dV\int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi}(\bar{D}+\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)\times$$
$$\times d(\mathrm{grad}\varphi)+\int_V\varphi\rho_0 dV-\int_V(\bar{D}\mathrm{grad}\varphi+\varphi\mathrm{div}\bar{D})dV-\int_V dV\cdot\mathrm{div}(\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)+C_1+C_2.\qquad(15)$$

У виразі (15) ми згрупували подібні члени. Тепер застосуємо відому формулу векторного аналізу $\int_v\mathrm{div}\bar{X}dV=\oint_S\bar{X}\overline{dS}$ [2] для перетворення двох передостанніх доданків:

$$-\int_V(\bar{D}\mathrm{grad}\varphi+\varphi\mathrm{div}\bar{D})dV-\int_V dV\cdot\mathrm{div}(\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)=-\int_V\mathrm{div}(\varphi\bar{D})dV-\int_V\mathrm{div}(\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)dV=$$
$$=-\oint_S\varphi(\bar{D}+\int_{t_0}^{t}\bar{J}dt)\overline{dS}=C_3.\qquad(16)$$

Ця величина є сталою, оскільки згідно з припущенням Б функції $\varphi,\bar{D},\bar{J}$ задані на граничній поверхні S.

З урахуванням (16) і позначенням $C = C_1 + C_2 + C_3$ отримаємо остаточний вираз енергії

$$W = \int_V dV \int_{\bar{B}_0}^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} - \int_V dV \int_{\bar{A}_0}^{\bar{A}} (\partial \bar{D} / \partial t + \bar{J}) \cdot d\bar{A} + \int_V dV \int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi} (\bar{D} + \int_{t_0}^{t} \bar{J} dt) \cdot d(\mathrm{grad}\varphi) +$$
$$+ \int_V \varphi \rho_0 dV + C. \qquad (17)$$

Еквівалентність задачі мінімізації енергії розв'язанню системи рівнянь Максвела. Доведемо, що вираз енергії (17) і є шуканим енергетичним функціоналом для варіаційного формулювання задачі аналізу електромагнітного поля. Мінімізацію функціонала W виконуватимемо, надаючи варіацію $\delta\varphi$ скалярному потенціалу та варіацію $\delta\bar{A}$ векторному потенціалу.

Варіацію функціонала W в разі варіації скалярного потенціалу запишемо як

$$\delta_\varphi W = \int_V (\bar{D} + \int_{t_0}^{t} \bar{J} dt) \mathrm{grad}(\delta\varphi) dV + \int_V \rho_0 \delta\varphi dV. \qquad (18)$$

Скористаємось формулами векторного аналізу $\mathrm{div}(\chi\bar{\mathrm{X}}) = \chi \mathrm{div}\bar{\mathrm{X}} + \bar{\mathrm{X}} \mathrm{grad}\chi$ та $\int_v \mathrm{div}\bar{\mathrm{X}} dV = \oint_S \bar{\mathrm{X}} \overline{dS}$ і перетворимо вираз (18) до вигляду

$$\delta_\varphi W = \int_V \mathrm{div}((\bar{D} + \int_{t_0}^{t} \bar{J} dt)\delta\varphi) dV - \int_V \mathrm{div}(\bar{D} + \int_{t_0}^{t} \bar{J} dt)\delta\varphi \cdot dV + \int_V \rho_0 \delta\varphi \cdot dV =$$
$$= \oint_S (\bar{D} + \int_{t_0}^{t} \bar{J} dt)\delta\varphi \cdot \overline{dS} - \int_V \mathrm{div}\bar{D} \cdot \delta\varphi \cdot dV - \int_V \mathrm{div}\left(\int_{t_0}^{t} \bar{J} dt\right)\delta\varphi \cdot dV + \int_V \rho_0 \delta\varphi dV =$$
$$= -\int_V \mathrm{div}\bar{D} \cdot \delta\varphi \cdot dV + \int_V (\rho - \rho_0)\delta\varphi \cdot dV + \int_V \rho_0 \delta\varphi dV = \int_V (-\mathrm{div}\bar{D} + \rho)\delta\varphi \cdot dV. \qquad (19)$$

У перетвореннях (19) використано той факт, що $\delta\varphi \equiv 0$ на границі S, а також відому формулу [5] $\mathrm{div}\bar{J} = -\partial\rho / \partial t$.

Варіацію функціонала W в разі варіації векторного потенціалу запишемо так:

$$\delta_{\bar{A}} W = \int_V \bar{H} \cdot \delta\bar{B} \cdot dV - \int_V \left(\partial\bar{D}/\partial t + \bar{J}\right)\delta\bar{A} = \int_V \bar{H} \cdot \mathrm{rot}\delta\bar{A} \cdot dV - \int_V \left(\partial\bar{D}/\partial t + \bar{J}\right)\delta\bar{A}. \qquad (20)$$

Скористаємось формулами векторного аналізу $\mathrm{div}(\bar{\mathrm{X}} \times \bar{\mathrm{Y}}) = \bar{\mathrm{Y}} \mathrm{rot}\bar{\mathrm{X}} - \bar{\mathrm{X}} \mathrm{rot}\bar{\mathrm{Y}}$ [2] та $\int_v \mathrm{div}\bar{\mathrm{X}} dV = \oint_S \bar{\mathrm{X}} \overline{dS}$ і перетворимо вираз (20) до вигляду

$$\delta_{\bar{A}} W = \int_V \mathrm{div}(\bar{H} \times \delta\bar{A}) dV + \int_V \mathrm{rot}\bar{H} \cdot \delta\bar{A} \cdot dV - \int_V \left(\partial\bar{D}/\partial t + \bar{J}\right)\delta\bar{A} \cdot dV =$$
$$= \oint_S \left(\bar{H} \times \delta\bar{A}\right)\overline{dS} + \int_V \left(\mathrm{rot}\bar{H} - \partial\bar{D}/\partial t - \bar{J}\right)\delta\bar{A} \cdot dV = \int_V (\mathrm{rot}\bar{H} - \partial\bar{D} / \partial t - \bar{J})\delta\bar{A} \cdot dV. \qquad (21)$$

У перетвореннях (21) використано той факт, що $\delta\bar{A} \equiv 0$ на границі S.

Мінімум функціонала знайдемо, прирівнявши його варіації (19) і (21) до нуля, тобто

$$\delta_{\varphi}W = 0; \qquad \delta_{\bar{A}}W = 0;$$

$$\int_V \left(-\mathrm{div}\bar{D} + \rho\right)\delta\varphi \cdot dV = 0; \qquad \int_V \left(\mathrm{rot}\bar{H} - \partial\bar{D}/\partial t - \bar{J}\right)\delta\bar{A} \cdot dV = 0. \tag{22}$$

Оскільки варіації $\delta\varphi$ та $\delta\bar{A}$ є довільними, то мінімум досяжний за умови рівності нулю підінтегральних виразів, тобто

$$\mathrm{div}\bar{D} = \rho; \qquad \mathrm{rot}\bar{H} = \bar{J} + \partial\bar{D}/\partial t.$$

Як бачимо, шукані функції, що надають функціоналові енергії мінімального значення, є водночас функціями, які задовольняють перше і третє рівняння Максвела. Отриманий висновок є частковим випадком загального принципу мінімальної дії [6].

Отримаємо вирази енергетичних функціоналів для часткових варіаційних задач електростатики, магнетостатики та стаціонарного електричного поля постійних струмів.

Варіаційне формулювання задачі електростатики. Умови, за яких електромагнітне поле є електростатичним, можна записати у вигляді

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const}; \quad \bar{D} = \mathrm{const}; \quad \bar{J} = 0. \tag{23}$$

Отже, вираз функціонала (17) набуває вигляду

$$W = \int_V dV \int_{\bar{B}_0}^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} + \int_V dV \int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi} \bar{D} \cdot d(\mathrm{grad}\varphi) + \int_V \varphi\rho \cdot dV + C\,. \tag{24}$$

На перший погляд, цей вираз не збігається зі звичним виразом енергії електростатичного поля, бо три його складові отримано з різних джерел – з виразу енергії магнітного поля, з виразу енергії електричного поля та з виразу роботи щодо переміщення зарядів. Детальний аналіз формули (24) виконаємо в частині 2 статті.

Оскільки нас цікавлять тільки електричні характеристики, то можна обмежитись варіацією за скалярним потенціалом функціонала

$$W_{es} = \int_V dV \int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi} \bar{D} \cdot d(\mathrm{grad}\varphi) + \int_V \varphi\rho \cdot dV\,, \tag{25}$$

який називатимемо енергетичним функціоналом варіаційної задачі електростатики. Варіація функціонала W_{es} в разі варіації скалярного потенціалу

$$\delta W_{es} = \int_V \bar{D}\mathrm{grad}\delta\varphi \cdot dV + \int_V \delta\varphi \cdot \rho \cdot dV = \int_V \mathrm{div}(\bar{D} \cdot \delta\varphi) dV - \int_V \mathrm{div}\bar{D} \cdot \delta\varphi \cdot dV +$$

$$+ \int_V \delta\varphi \cdot \rho \cdot dV = \int_V (-\mathrm{div}\bar{D} + \rho)\delta\varphi \cdot dV\,. \tag{26}$$

У перетвореннях (26) використано той факт, що $\delta\varphi \equiv 0$ на границі S.

Мінімум функціонала знайдемо, прирівнявши його варіацію до нуля, тобто

$$\delta W_{es} = 0; \quad \int_V (-div\bar{D} + \rho)\delta\varphi \cdot dV = 0. \tag{27}$$

Оскільки варіація $\delta\varphi$ є довільною, то мінімум досягається за умови рівності нулю підінтегрального виразу, тобто

$$\mathrm{div}\overline{D} = \rho. \tag{28}$$

Як бачимо, шукана функція, що надає функціоналові енергії мінімального значення, задовольняє рівняння Максвела для електростатичного поля.

Варіаційне формулювання задачі магнетостатики. Умови, за яких електромагнітне поле є магнетостатичним, можна записати у вигляді

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const}; \quad \overline{D} = \mathrm{const}; \quad \overline{J} = \mathrm{const}. \tag{29}$$

Отже, вираз функціонала (17) набуває вигляду

$$W = \int_V dV \int_{\overline{B}_0}^{\overline{B}} \overline{H} d\overline{B} - \int_V dV \int_{\overline{A}_0}^{\overline{A}} \overline{J} \cdot d\overline{A} + \int_V dV \int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi} (\overline{D} + \overline{J}(t - t_0)) d(\mathrm{grad}\varphi) + \int_V \varphi\rho \cdot dV + C. \tag{30}$$

На перший погляд, цей вираз не збігається зі звичним виразом енергії магнетостатичного поля, бо три його складові отримано з різних джерел – з виразу енергії магнітного поля, з виразу енергії електричного поля та з виразу роботи щодо переміщення зарядів. Детальний аналіз формули (30) виконаємо в частині 2 статті.

Оскільки нас цікавлять тільки магнітні характеристики, то можна обмежитись варіацією за векторного потенціалу функціонала

$$W_{ms} = \int_V dV \int_{\overline{B}_0}^{\overline{B}} \overline{H} d\overline{B} - \int_V dV \int_{\overline{A}_0}^{\overline{A}} \overline{J} \cdot d\overline{A}, \tag{31}$$

який називатимемо енергетичним функціоналом варіаційної задачі магнетостатики. Варіація функціонала W_{ms} в разі варіації векторного потенціала

$$\delta W_{ms} = \int_V \overline{H} \cdot \delta\overline{B} \cdot dV - \int_V \overline{J} \cdot \delta\overline{A} \cdot dV = \int_V \mathrm{div}(\overline{H} \times \delta\overline{A}) dV + \int_V \mathrm{rot}\overline{H} \cdot \delta\overline{A} \cdot dV -$$

$$- \int_V \overline{J} \cdot \delta\overline{A} \cdot dV = \int_V (rot\overline{H} - \overline{J}) \delta\overline{A} \cdot dV. \tag{32}$$

У перетвореннях (32) використано той факт, що $\delta\overline{A} \equiv 0$ на границі S.

Мінімум функціонала знайдемо, прирівнявши його варіацію до нуля, тобто

$$\delta_{\overline{A}} W = 0. \int_V (rot\overline{H} - \overline{J}) dV = 0. \tag{33}$$

Оскільки варіація $\delta\overline{A}$ є довільною, то мінімум досягається за умови рівності нулю підінтегрального виразу, тобто

$$\mathrm{rot}\overline{H} = \overline{J}. \tag{35}$$

Як бачимо, шукана функція, що надає функціоналові енергії мінімального значення, задовольняє рівняння Максвела для магнетостатичного поля.

Варіаційне формулювання задачі аналізу стаціонарного електричного поля постійних струмів. Умови, за яких електромагнітне поле називають стаціонарним електричним полем постійних струмів, можна записати у вигляді

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const}; \quad \overline{D} = \mathrm{const}; \quad \overline{J} = \mathrm{const}. \tag{36}$$

Отже, вираз функціонала (17) набуває вигляду

$$W = \int_V dV \int_{\bar{B}_0}^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} - \int_V dV \int_{\bar{A}_0}^{\bar{A}} \bar{J} \cdot d\bar{A} + \int_V dV \int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi} (\bar{D} + \bar{J}(t - t_0)) d(\mathrm{grad}\varphi) + \int_V \varphi\rho \cdot dV + C \,. \quad (37)$$

Оскільки нас цікавлять тільки електричні характеристики, то можна обмежитись варіацією за векторного потенціалу функціонала

$$W_{st} = \int_V dV \int_{\mathrm{grad}\varphi_0}^{\mathrm{grad}\varphi} (\bar{D} + \bar{J}(t - t_0)) d(\mathrm{grad}\varphi) + \int_V \varphi\rho \cdot dV \,, \quad (38)$$

який називатимемо енергетичним функціоналом варіаційної задачі стаціонарного електричного поля постійних струмів. Варіація функціонала W_{st} в разі варіації скалярного потенціалу

$$\delta W_{st} = \int_V (\bar{D} + \bar{J}(t - t_0)) \mathrm{grad}\delta\varphi \cdot dV + \int_V \delta\varphi \cdot \rho \cdot dV = \int_V \mathrm{div}((\bar{D} + \bar{J}(t - t_0))\delta\varphi) dV -$$

$$- \int_V \mathrm{div}(\bar{D} + \bar{J}(t - t_0))\delta\varphi \cdot dV + \int_V \delta\varphi \cdot \rho \cdot dV = \int_V (-\mathrm{div}(\bar{D} + \bar{J}(t - t_0)) + \rho)\delta\varphi \cdot dV. \quad (39)$$

У перетвореннях (39) використано той факт, що $\delta\varphi \equiv 0$ на границі S.

Мінімум функціонала знайдемо, прирівнявши його варіацію до нуля, тобто

$$\delta W_{st} = 0; \ \int_V (-\mathrm{div}(\bar{D} - \bar{J}(t - t_0) + \rho)\delta\varphi \cdot dV = 0. \quad (40)$$

Оскільки варіація $\delta\varphi$ є довільною, то мінімум досягається за умови рівності нулю підінтегрального виразу, тобто

$$-\mathrm{div}\bar{D} + \rho - (t - t_0)\mathrm{div}\bar{J} = 0. \quad (41)$$

Оскільки рівність (41) повинна виконуватись для будь-якого моменту часу, то рівняння (41) розпадається на систему двох рівнянь:

$$\mathrm{div}\bar{D} = \rho; \ \ \mathrm{div}\bar{J} = 0. \quad (42)$$

Як бачимо, шукана функція, що надає функціоналові енергії мінімального значення, задовольняє рівняння Максвела для стаціонарного електричного поля постійних струмів.

У частині 2 статті плануємо викласти числову реалізацію варіаційної задачі аналізу електромагнітного поля на підставі методики інваріантних апроксимацій [7].

---

1. *Березанский Б. М.*, *Ус Г. Ф.*, *Шефтель З. Г.*, Функциональный анализ. К.: Выща школа, 1990. 600 с.
2. *Корн Р.*, *Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832 с.
3. *Марчук Г.И.*, *Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
4. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
5. *Нейман Л.Р.*, *Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники. Т. 2. Л.: Энергия, 1967. 408 с.
6. *Фейнман Р.*, *Лейтон Р.*, *Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. М.: Мир, 1977. 287 с.

7. *Фільц Р.В*. Дискретний аналог оператора Гамільтона // Матем. методи та фіз.-мех. поля. 1986. Вип. 24. С. 20–25.

**THEORETICAL PRINCIPLES OF THE VARIATION PROMLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD ANALISYS
PART 1**

M. Howykowycz, R. Filc

Lviv Polytechnic National University
Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine
e-mail howykowycz@ieee.org

An expression of energetic functional for formulation of an variational problem of electromagnetic field analysis has been developed in the form of full energy expression for a medium placed in the electromagnetic field. It has been shown that functions which satisfy the first and third Maxwell's equations deliver the least value of the discussed functional. Partial expressions of the energetic functional for electrostatics, magnetostatics and direct currents' stationary electric field problems have been received.

Key words: variational problem, energetic functional, Maxwell equation, full energy, electromagnetic field.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2006
Прийнята до друку 30.01.2007