МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ТА ДИСКРЕТНИХ КІЛ І СИСТЕМ

УДК 62-83-52:621.313.33

СИМВОЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КІЛ: СТАН ПИТАННЯ, ЗМІСТ І НАПРЯМИ ЗАСТОСУВАННЯ

Ю. Шаповалов, Б. Мандзій

Національний університет "*Львівська політехніка*"
вул. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна

Розглянуто стан справ у питанні символьного частотного аналізу лінійних параметричних кіл. Оцінено метод, що ґрунтується на рівнянні Л.А. Заде, запропоновано напрями його застосування.

Ключові слова: символьний частотний аналіз, значення чутливості, апроксимація, параметричні кола.

Символьний аналіз у методах автоматизованого проектування електронних кіл завжди посідав особливо важливе місце, оскільки він дає змогу виявити зв'язки між результатами аналізу та параметрами компонентів кола, що, відповідно, робить процес проектування цілеспрямованішим та якісно змістовним.

"Ручний" розрахунок кіл, який використовували до появи комп'ютерних програм, був хоча й значно наближеним, проте ґрунтувався на таких зв'язках, що забезпечували адекватність результатів проектування. Досвід використання перших програм та систем автоматизованого проектування радіоелектронної апаратури (РЕА), які ґрунтувалися переважно на числових методах, неодноразово засвідчував, що, незважаючи на швидкість отримання результату, на кожному окремому кроці проектування вони не виявляли якісного (аналітичного) взаємозв'язку між результатами розрахунків і параметрами компонентів. Тому символьні методи, які часто є громіздкими і повільнішими, завжди були в полі зору спеціалістів.

Символьні методи в автоматизації проектування РЕА розвивали і підтримували такі українські вчені, як В.П. Сігорський, Я.К. Трохименко, Б.І. Блажкевич, М.Г. Максимович, Р.В. Дмитришин, Я.М. Матвійчук та ін. Праці цих учених сприяли розвитку символьних методів аналізу лінійних кіл зі сталими параметрами. Застосування перетворення Лапласа чи Хевісайда до математичних моделей таких кіл у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами приводило до математичних моделей у вигляді системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно зображень відповідних змінних. На цій підставі використовували добре розроблені методи аналізу прохідних чотири- та

© Шаповалов Ю., Мандзій Б., 2007

багатополюсників, методи розрахунку вторинних параметрів електронних кіл та їхніх частотних характеристик тощо.

Інакше з лінійними колами зі змінними в часі параметрами, зокрема, параметричними колами, математична модель яких має вигляд диференціального рівняння такого вигляду:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y = b_m(t)x^{(m)} + b_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \ldots + b_1(t)x\,, \qquad (1)$$

де y – вихідна (шукана) та x − вхідна (задана) змінні, відповідно; t – незалежна змінна (час); $a_i(t)$, $b_j(t)$ – відомі функції часу t.

Рівняння (1) не можуть бути в загальному випадку алгебризовані за допомогою згаданих вище перетворень, оскільки містять змінні в часі коефіцієнти. Тому й методи аналізу кіл зі сталими параметрами, про які зазначено, у цьому випадку не можна застосовувати. При потребі такі рівняння розв’язуються різними числовими методами з типовими для таких методів особливостями та недоліками [13–15, 20]. Аналітичні розрахунки якщо й виконуються, то у досить обмежених випадках та, як правило , за визначеними тільки для цих випадків і часто наближеними залежностями [5, 8].

Ряд вітчизняних авторів спрямовують свої зусилля на побудову загальної теорії параметричних кіл [1–4, 6–7].

З іншого боку, розробники РЕА, намагаючись спростити розрахунки при розв’язанні (1), шукали підходів, подібних до використовуваних при аналізі кіл з постійними параметрами. Наприклад, у другій половині 40-х років XX ст. вчені І.З. Штокало та Ш. Блан [25–26] за аналогією з колами зі сталими параметрами ввели, а пізніше інші автори уточнили [11], поняття функції передавання $W(s,t)$ (строго кажучи, тут і далі йдеться про спряжену [17] функцію передавання). Якщо функція передавання кола зі сталими параметрами $W(s)$ є функцією тільки однієї змінної s, то для параметричних кіл ця функція в силу нестаціонарності параметрів кола стає ще й функцією часу t, тобто $W(s,t)$.

У 1950 р. Л.А. Заде для параметричного кола, описаного диференціальним рівнянням (1), вивів диференціальне рівняння, що описує це коло у частотній області [28]:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n A(s,t)}{ds^n}\frac{d^n W(s,t)}{dt^n} + \ldots + \frac{dA(s,t)}{ds}\frac{dW(s,t)}{dt} + A(s,t)W(s,t) = B(s,t)\,, \qquad (2)$$

де $W(s,t) = \dfrac{Y(s,t)}{X(s,t)}$ – функція передавання кола; $A(s,t) = a_n(t)s^n + \ldots a_1(t)s +$ $+a_0(t)$; $B(s,t) = b_m(t)s^m + \ldots + b_1(t)s + b_0(t)$; $a_i(t), b_j(t)$ – відповідні коефіцієнти рівняння (1); $Y(s,t), X(s,t)$ – зображення вихідної та вхідної змінних у частотній області, відповідно; s – комплексна змінна; t – час.

Диференціальне рівняння (2) містить комплексні змінні в часі коефіцієнти та таку ж праву частину і за нульових початкових умов описує передавальну функцію параметричного кола та її зв’язок з коефіцієнтами рівняння (1). Очевидно, що для кола зі сталими коефіцієнтами $(a_i(t), b_j(t) = \mathrm{const})$ похідні функції $W(s,t)$ за часом у (2) дорівнюють нулю, і це рівняння перетворюється у загальновідомий вираз для кіл зі сталими параметрами [16]:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}\,. \tag{2,a}$$

У праці [28] наведено два методи наближеного розв'язування рівняння (2), які, з одного боку, дають змогу "вручну" отримати результат (хоча й дуже наближений), а з іншого, – незручні для програмної реалізації, і тому не приводять до принципового підвищення точності розрахунків. Пізніше автори [11–12, 17, 19] широко використали рівняння (2), але не дали точніших чи ефективніших методів його розв'язування. Труднощі розв'язування рівняння (2) і стали тією причиною, яка на деякий час загальмувала розвиток частотних символьних методів аналізу параметричних кіл.

Принципово нові можливості отримали символьні методи у сучасних засобах автоматизованого проектування РЕА завдяки появі універсальних програмних засобів з потужними блоками символьної математики (наприклад, MATHCAD, MATLAB та ін.), які, на наш погляд, дають змогу поєднати додатні сторони числових та символьних методів аналізу і зробити процес проектування РЕА швидкодійним, цілеспрямованим та якісно змістовним.

Нижче узагальнено результати символьного аналізу математичної моделі параметричного кола у частотній області на підставі застосування ефективного методу та програмних засобів символьної математики для розв'язування рівняння (2).

Метод символьного частотного аналізу лінійних параметричних кіл. У праці [24] запропоновано спосіб розв'язування рівняння (2) на підставі використання ефективного методу гальоркінського типу [10] у поєднанні з можливостями програмних засобів з потужними блоками символьної математики. Це послугувало поштовхом до використання символьних частотних методів у практиці моделювання лінійних параметричних кіл.

Запропонований підхід ґрунтується на таких вихідних положеннях:

1) у колі є один параметричний елемент, параметр якого змінюється у часі періодично з періодом T;

2) коефіцієнти правої і лівої частин рівняння (2) можуть не залежати від часу або бути періодичними функціями часу з періодом T;

3) передавальна функція $W(s,t)$ теж є періодичною функцією часу з періодом T;

4) оскільки в загальному випадку рівняння (2) не має точного аналітичного розв'язку, то розв'язок необхідно шукати у вигляді певної апроксимації, яка повинна враховувати як відомі властивості шуканої передавальної функції $W(s,t)$, так і особливості алгоритму її визначення. Це означає: а) апроксимація $\hat{W}(s,t)$ передавальної функції $W(s,t)$ повинна бути такою, що забезпечує довільну наперед задану точність; б) оскільки $\hat{W}(s,t)$ у разі підстановки в (2) потрібно диференціювати за часом n разів, то її треба описувати відомими функціями, які легко диференціювати (наприклад, без багатоповерхових дробів тощо).

Для розв'язування (2) в праці [24] запропоновано апроксимацію $\hat{W}(s,t)$ тригонометричним рядом Фур'є (до речі, зазначимо, що у [9], правда, для інших цілей, також використане зображення $W(s,t)$ тригонометричним рядом Фур'є). Ця апроксимація повністю задовольняє наведені вище вимоги і має вигляд

$$\hat{W}(s,t) = W_0(s) + \sum_{i=1}^{k} [W_{ci}(s)\cos(i\Omega t) + W_{si}(s)\sin(i\Omega t)], \quad (3)$$

де $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Такі вимоги задовольняє й апроксимація $\hat{W}(s,t)$ рядом Фур'є у комплексній формі:

$$\hat{W}(s,t) = W_0(s) + \sum_{i=1}^{k} [W_{-i}(s)\exp(i\Omega t) + W_{+i}(s)\exp(i\Omega t)]. \quad (4)$$

Алгоритм знаходження розв'язку (2) такий.

Крок 1. Один з виразів (3) чи (4), нехай вираз (3), диференціюємо за t n разів і разом з n похідними підставляємо у (2).

Крок 2. Переносимо після цього у виразі (2) праву частину вліво, отримуємо алгебричний вираз, який позначимо так:

$$\delta(W_0, W_{c1}, W_{s1}, W_{c2}, W_{s2}, ..., W_{ck}, W_{sk}) = 0. \quad (5)$$

Функціонал δ з (5) у часі періодичний з періодом T і містить $(2k+1)$ невідомих $W_0, W_{c1}, W_{s1}, W_{c2}, W_{s2}, \ldots, W_{ck}, W_{sk}$, які потрібно визначити.

Крок 3. Оскільки функціонал δ є періодичний, то розкладаємо його у ряд Фур'є з періодом T і, згідно з (5), прирівнюємо k гармонік і сталу складову цього ряду до 0. У результаті отримуємо $(2k+1)$ лінійних алгебричних рівнянь, які й формують лінійну систему (СЛАР) $(2k+1)$- го порядку з $(2k+1)$ невідомими.

Крок 4. Розв'язування отриманої СЛАР і визначає шукані невідомі виразу (5) та апроксимації (3). Очевидно, що аналогічні дії можемо провести й з апроксимацією (4).

Зазначимо такі особливості описаного вище методу символьного частотного аналізу лінійних параметричних кіл.

1. Стосовно вибору кількості k гармонік (крок 3) зазначимо, що, як звичайно, вибираємо перші k гармонік. Проте відомі алгоритми, які дають змогу отримувати розв'язки у випадку, коли кількість рівнянь більша, ніж кількість невідомих. На наш погляд, питання вибору гармонік та кількості рівнянь у кожному конкретному випадку доцільно покласти на спеціаліста, який проектує задане параметричне коло.

2. Розв'язання отриманої у кроці 4 СЛАР (позначимо її у матричній формі через $M \times W = P$) має свої особливості, оскільки деякі чи всі елементи матриці M та вектора P задані символьно. Тому для розв'язання СЛАР потрібно застосовувати символьні методи.

3. Вибір апроксимації (3) чи (4) принципового значення не має. Проте, як засвідчила практика, у разі застосування апроксимації (4) матриця M за однакового з апроксимацією (3) порядку більше розріджена. А це досить важливо у випадку символьного розв'язування СЛАР. Тому, на наш погляд, апроксимація (4) принадніша.

4. Розв'язавши СЛАР, отримуємо апроксимувальний вираз для $W(s,t)$ у вигляді (3) чи (4). Величини $W_0(s), W_{ci}(s), W_{si}(s)$ чи $W_0(s), W_{-i}(s), W_{+i}(s)$ у цьому разі є дробово-раціональними виразами, подібними до (2, а), де знаменники

однакові і є визначником матриці M, а чисельники – визначниками модифікованих матриць M, у яких відповідний стовпець замінений вектором P.

5. Особливість кроків 1–4 полягає у тому, що декілька чи всі параметри досліджуваного кола, включаючи s, Ω та інші параметри параметричного елемента, задані символьно. Тому диференціювання апроксимувальної функції, підстановка її та її похідних у рівняння (2), визначення k гармонік з $(2k+1)$- разовим інтегруванням добутків виразу (5) на відповідні ортогональні функції, розв'язання СЛАР – є символьними і дуже громіздкими. Тут і прийшли на допомогу згадані вище потужні символьні блоки сучасних пакетів CAD, які й зробили описані обчислення практично можливими [23].

6). Символьне розв'язання СЛАР, якщо й буде ускладнене в разі використання пакетів CAD, може бути виконане, наприклад, добре зарекомендованими програмами [21], що реалізують метод *d*-дерев.

Результати досліджень та напрями застосування. Розглянутим методом проаналізовано низку параметричних кіл: генератора імпульсів, модулятора, синхронного детектора, одно- та двоконтурного параметричного підсилювача. У працях [22–23, 27] наведено результати таких досліджень. Результати аналізу генератора імпульсів збіглися з даними, наведеними у [18]. Результати, отримані під час аналізу інших параметричних кіл, є фізично очікуваними, хоча детальніше порівняння їх з даними інших авторів ускладнене, бо в літературі таких даних нема.

Суттєво важливим питанням у разі аналізу лінійних параметричних кіл є питання стійкості цих кіл. Невчасно чи невдало виконане дослідження стійкості проектованого пристрою може завдати невиправданих втрат часу та звести нанівець подальші етапи його проектування. Особливо це стосується параметричних кіл.

Аналіз стійкості параметричних кіл пов'язаний зі знаходженням коренів так званої нормальної параметричної функції передавання $W(s,\xi)$ [17], яка є розв'язком диференціального рівняння, подібного до (2). Це рівняння також доцільно розв'язувати методом, розглянутим вище, та обчислювати корені розв'язку традиційними методами.

Важливим питанням проектування РЕА є можливість визначення чутливостей досліджуваних кіл. Чутливість є основою для розв'язування задач статистики, оптимізації та синтезу низкою широко використовуваних методів. Головна перевага символьних методів, зокрема, й розглянутого нами символьного методу визначення передавальних функцій параметричних кіл, полягає у простоті визначення їхніх чутливостей до зміни параметрів кола, включаючи параметри параметричного елемента, комплексну змінну p та дійсну змінну t. Отже, розглянутий метод може стати основою для розроблення програм аналізу лінійних параметричних кіл у сучасних пакетах автоматизованого проектування РЕА.

---

1. *Арбузников В.А.* Дифференциальные модели нестационарных двухполюсников для имитации радиотехнических информационных структур // Праці УНДІРТ, Одеса, 1999. № 3. С. 35–40.

2. *Арбузников В.А.* Обобщение соотношения Роу для параметрических управляемых источников-четырехполюсников // Наук. праці УДАЗ: Пер. наук. збірник, Одеса, 1999. № 2. С. 58–69.
3. *Арбузников Е.А., Варава Ю.В.* Внешние дополнения для нестационарных двухполюсников. // Праці УНДІРТ, Одеса, 2007. № 1(49). С. 10–20.
4. *Арбузников В.А., Палагин А.И., Рудый Е.М.* Базовый набор нестационарных 2x2 полюсников – ассиноров // Наук. праці ОНАЗ, Одеса, 2003. № 1. С. 35–38.
5. *Арбузников В.А., Рудый Е.М., Сукачев Э.А.* Автоматическое проектирование обобщенного параметрического колебательного контура // Наук. праці ОНАЗ, Одеса, 2002. № 1. С. 52–58.
6. *Белоглазов В.В*., *Бирюк Н.Д., Юргелас В.В.* Анализ, свойства и потенцальные возможности параметрического контура. Резонанс // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. 2007. № 6. С. 39–51.
7. *Бирюк Н.Д., Нечаев Ю.Б., Латышева Е.В.* Параметрический контур как обобщение обычного колебательного контура // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. 2007. № 6. С. 68–76.
8. *Бирюк Н.Д., Нечаев Ю.Б., Финько В.Н.* Резонансные явления в электрическом контуре с периодически меняющимися параметрами // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. 2006. № 1. С. 72–80.
9. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 608 с.
10. *Красносельский М.А*., *Вайникко Г.М*., *Забрейко П.П.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука. 1969. 456 с.
11. *Михайлов Ф.А.* Теория и методы исследования нестационарных линейных систем. М.: Наука. 1986. 320 с.
12. *Михайлов Ф.А*., *Теряев Е.Д*., *Булеков В.П.* и др. Динамика нестационарных линейных систем. М.: Наука, 1967. 368 с.
13. *Разевиг В.Д.* Система схемотехнического моделирования Micro-Cap 6 // Изд. «Горячая Линия-Телеком», 2001. 344 с.
14. *Разевиг В.Д.* Система сквозного проектирования электронных устройств DesignLab 8.0 // Изд. «СОЛОН-Р», 2003. 698 с.
15. *Рыбин А.И.* Анализ переходных и установившихся режимов в линейно-параметрических цепях модифицированным методом припасовывания // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. 2001. № 3. С. 31–41.
16. *Сигорский В.П*., *Петренко А.И.* Основы анализа электронных схем. К.: Вища шк., 1971. 568 с.
17. *Солодов А.В*., *Петров* Ф.*С.* Линейные автоматические системы с переменными параметрами. М.: Наука, 1971. 620 с.
18. Таблицы и формулы функций В.К. Туркина. Л.: Изд-во ЛЭИС, 1963. 207 с.
19. *Тафт В.А.* Электрические цепи с переменными параметрами. М.: Энергия, 1968. 328 с.
20. *Хайнеман Р.* Pspice. Моделирование работы электронных схем // Изд. «ДМК», 2005, 336 с.
21. *Шаповалов Ю.І*., *Давидюк Р.Д.* Особенности реализации метода топологического анализа схем в программе АС13ЕС // Изв. вузов: Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 6. С. 79–81.

22. *Шаповалов Ю*. Моделювання лінійних параметричних кіл частотним символьним методом // Вісн. ДУ "Львів. політехніка". Теорія і проектування напівпровідникових та радіоелектронних пристроїв. 1998. № 343. С. 126–132.
23. *Шаповалов Ю*., *Шмотолоха І*. Аналіз параметричних підсилювачів частотним символьним методом // Вісн. ДУ "Львів. політехніка". Радіоелектроніка та телекомунікації. 2000. № 399. С. 40–48.
24. *Шаповалов Ю*., *Шувар Б*. Підвищення ефективності частотних методів аналізу параметричних кіл // Вісн. ДУ "Львів. політехніка". Теорія і проектування напівпровідникових та радіоелектронних пристроїв. 1996. № 302. С. 71.
25. *Штокало И.З*. Обобщение основной формулы символического метода на случай линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1945. Т. 42. № 1. С. 9–10.
26. *Blanc Ch*. Sur les équation différentielles linéaires a coefficients lentement variable // Bull. Technique de la Suisse romande. 1948. Vol. 74. N 15. P. 182–189.
27. *Shapovalov*, *Shmotolocha I.* Analysis of the Variable Modulator by using of the Frequency Symbolic Method // TCSET'2000, Lviv, 2000. Ukraine. P. 7–8.
28. *Zadeh L.A.* Frequency Analysis of Variable Networks // Proc. of the IRE. 1950. Vol. 39. P. 291–299.

THE SYMBOL ANALYSIS OF THE LINEAR PARAMETRIC CIRCUITS: STATE OF THE QUESTION, ESSENCE AND DIRECTION OF THE APPLICATION

Y. Shapovalov, B. Mandziy

Lviv Polytechnic National University
12 Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

In the paper the problem of symbol frequency analysis of linear parametric circuits is considered. The method based on Zadeh equations is evaluated and possible approaches for its usage are proposed.

Key words: the symbol frequency analysis, value of sensitivity, approximation, parametric circuits.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2007
Прийнята до друку 30.11.2007