УДК 621.372.061

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МЕТОДУ ПОШУКУ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРОННИХ СХЕМ

Я. Шмигельський, М. Жовтанецький

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. генерала Тарнавського, 107, Львів 79017, Україна
пр. Свободи, 18, Львів 79008, Україна
shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

Для числового розрахунку стаціонарних режимів електронних схем розроблено і досліджено алгоритм, що використовує регуляризований за А. Тихоновим метод Ньютона. Це дало змогу ефективно розв'язувати "важкі" задачі, зокрема пошук усталених режимів у системах із сильною нелінійністю.

Ключові слова: електронна схема, математична модель, усталений режим, метод Ньютона, регуляризация за А. Тихоновим.

Розглянемо нелінійну електронну схему з періодичним збудженням, математична модель якої має вигляд

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t+T) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$. Вважаємо, що права частина (1) неперервна за t, неперервно диференційована за $\boldsymbol{x}$ і система (1) має *T*-періодичний розв'язок.

Нехай $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_o, \boldsymbol{x}_o)$ – розв'язок системи (1) з початковими умовами $\boldsymbol{x}(t_o) = \boldsymbol{x}_o$. Позначимо $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_o) = \boldsymbol{\varphi}(t_o + T, t_o, \boldsymbol{x}_o)$ – відображення точки $\boldsymbol{x}_o$ уздовж траєкторії $\boldsymbol{x}(t)$ за період *T*. Тоді, як відомо, пошук періодичного режиму системи (1) можна звести до розв'язування рівняння

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) = 0, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_o$. У силу припущень про праву частину (1) функція $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ неперервно диференційована [4].

Одним з найпоширеніших методів розв'язування задачі (2) дотепер є укорочений метод Ньютона (УМН)

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_k)(\boldsymbol{y}_{k+1} - \boldsymbol{y}_k) = -h_k \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k), \quad k = 0,1.2,\dots, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y_k}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{y_k})$ – похідна від вектора-функції $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ при $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_k}$; $h_k \in [h_{\min}, 1]$ – релаксаційний параметр (крок методу Ньютона). При $h_k = 1$ УМН збігається з класичним методом Ньютона.

Для практичних розрахунків метод (3) повинен бути доповнений алгоритмом вибору кроку h_k, що ґрунтується на принципі зменшення відхилу

$$\delta_k = [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k) = \left\| \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k) \right\|^2, \tag{4}$$

де т – символ траспонування. УМН (3) разом з алгоритмом вибору кроку, що забезпечує зменшення відхилу на кожній ітерації, має квадратичну швидкість збіжності поблизу розв'язку за стандартних для методу Ньютона обмежень на функцію $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ та її похідну $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$ [1].

У процесі розрахунку періодичного стану системи (1) нерідко виникає ситуація, коли матриця $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$ стає погано зумовленою. У цьому випадку УМН (3) може не сходиться навіть за мінімального значення кроку $h_k = h_{\min}$. Це пов'язано з тим, що лінійна система (3) стає некоректною. Тому в ітераційному процесі (3) є сенс скористатися регуляризацією за А. Тихоновим [5]. Регуляризований метод (3) має вигляд

$$\left(\alpha_k \boldsymbol{I} + [\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_k)]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_k)\right)(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}+1} - \boldsymbol{y}_k) = -h_k [\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_k)]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

де α_k – параметр регуляризації. Метод (4) будемо називати регуляризованим укороченим методом Ньютона (РУМН).

Якщо параметр регуляризації α_k в (5) вибирати за відхилом (4) у такий спосіб:

$$\alpha_k = \beta\delta_k, \qquad 0 < \beta \ll 1, \tag{6}$$

то можна довести справедливість таких тверджень [1].

1. Нехай окіл $\left\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^* \right\| \le \left\| \boldsymbol{y}_o - \boldsymbol{y}^* \right\|$, де $\boldsymbol{y}^*$ – простий корінь рівняння $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = 0$, не містить інших коренів рівняння (2), а $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$ неперервна в цьому околі. Тоді РУМН (4) разом з алгоритмом вибору оптимального кроку сходиться до $\boldsymbol{y}^*$ або до кореня $\bar{\boldsymbol{y}}^*$ рівняння $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = 0$, якщо такий корінь існує. Причому збіжність РУМН до кореня $\bar{\boldsymbol{y}}^*$ практично неможлива за обмеження кроку h знизу величиною $h_{\min} = 0{,}1$.

2. Збіжність РУМН поблизу кореня $\boldsymbol{y}^*$ квадратична.

Зрозуміло, що у випадку, коли УМН (3) сходиться добре, регуляризація не поліпшує його збіжність, а приводить тільки до збільшення обчислювальних витрат на кожній ітерації. Тому регуляризацію доцільно застосовувати тільки на тих ітераціях, коли система (3) виявиться справді погано зумовленою. Тобто найприйнятнішим є поєднання УМН і РУМН. Такий метод іноді називають частково регуляризированим укороченим методом Ньютона (ЧРУМН).

Визначення зумовленості системи (3) під час ітераційного процесу дуже трудомістке. Тому моменти включення РУМН доводиться визначати за непрямими ознаками. Наприклад, помічено, що погана зумовленість системи (3) часто виникає за невдалого вибору початкового наближення. Тому в [1] запропоновано завжди дві перші ітерації виконувати з регуляризацією.

Ми використали регуляризацію в алгоритмі прискореного пошуку періодичних режимів, запропонованого у [2]. У цьому алгоритмі застосовано ефективну процедуру, що складається із поєднання УМН і методу простої ітерації (МПІ) для рівняння (2):

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{7}$$

Зазначимо, що метод простої ітерації (7) завжди сходиться до розв’язку $\boldsymbol{y}^*$ рівняння (2), який є стійким періодичним станом системи (1).

Розрахунок завжди починається з МПІ. Перехід із МПІ на УМН відбувається після заданої фіксованої кількості простих ітерацій. Повернення алгоритму з УМН на МПІ виникає в тому випадку, коли УМН не забезпечує монотонного зменшення відхилу δ_k навіть за мінімального кроку $h_{\min} = 0{,}1$. Якщо система (1) конвергентна, тобто в ній існує єдиний стійкий у цілому періодичний режим, то цей алгоритм є глобально збіжним. Проте всі проблеми, пов’язані з поганою зумовленістю системи (3), залишаються й суттєво сповільнюють процес пошуку усталеного режиму. Тому замість УМН у цьому алгоритмі був застосований ЧРУМН, суть якого полягала у виконанні двох перших ітерацій з регуляризацією у ньютонівському процесі за кожного включення УМН і ще однієї ітерації з регуляризацією в разі спроб алгоритму перейти на МПІ. Оскільки типові значення параметра регуляризації під час розв’язування некоректних задач $\alpha = 10^{-4}...10^{-6}$ [4], то коефіцієнт β у (6) під час кожного переходу алгоритму на РУМН вибирали в такий спосіб:

$$\beta = \frac{10^{-4}}{\delta_o}\ ,$$

де δ_o – відхил (4) перед включенням РУМН.

Роботу алгоритмів прискореного пошуку усталеного режиму з УМН і з ЧРУМН можна проілюструвати на прикладі розрахунку періодичного стану схеми резонансного підсилювача (див. рисунок), що працює в нелінійному режимі.

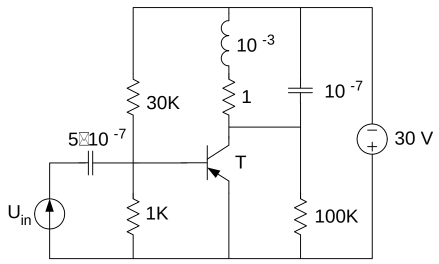

Схема резонансного підсилювача. U_{in}=0,2sin(3200πt) V.

Розрахунки виконано за допомогою системи аналізу електронних схем SANOS [2]. Результати числових експериментів, наведені в таблиці, свідчать про переваги алгоритму з ЧРУМН. Під незадовільною ітерацією в таблиці розуміють ньютонівську ітерацію, після якої не відбувається зменшення відхилу. Результати таких ітерацій алгоритм відкидає і перераховує з новим зменшеним значенням кроку.

Результати розрахунку періодичного стану
схеми резонансного підсилювача

Метод	УМН	ЧРУМН
Загальна кількість ньюто нівських ітерацій	10	8
Незадовільні ітерації	6	1
Переходи на МПІ	1	0

1. *Ермаков В.В., Калиткин Н.Н.* Оптимальний шаг и регуляризация метода Ньютона // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1981. Т. 21. № 2. С. 491–497.
2. *Матвийчук Я.М.* Математичне моделювання динамічних систем: теорія і практика. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2000.
3. *Синицкий Л.А., Хвищун И.А., Шмигельский Я.А.* О надежном алгоритме поиска периодических режимов в нелинейных цепях // Теор. Электротехника. 1981. Вып. 30. С. 114–125.
4. *Скельбоэ С.* Временной стационарный анализ нелинейных электрических систем // Труды ин-та инженеров по электронике и радиотехнике. 1982. Т. 70. №10. С. 89–111.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

REGULARIZATION OF A METHOD OF SEARCH OF PERIODIC MODES OF THE ELECTRONIC CIRCUITS

Y. Shmygelsky, M. Zhovtanets'ky

Ivan Franko Lviv National University
Dragomanov Str., 19, Lviv 79005, Ukraine
Svoboda av., 18, Lviv 79008, Ukraine
e-mail: shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

Usage Tikhonov's regularization of a method of Newton for search of a steady state of the nonlinear electronic circuits is considered. The results of numerical experiments represented.

Key words: electronic circuit, mathematical model, periodic mode, method of Newton, Tikhonov's regularization.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005
Прийнята до друку 01.09.2005