ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ELECTRICAL ENGINEERING
2005. Вип. 58. С. 51-64 2005. Is. 58. P. 51-64

УДК 621.3

РІВНОВАЖНИКОВИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Р. Фільц

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, Львів 79013, Україна

Для функції, розкладної в ряд Тейлора, збіжний всюди, введено поняття рівноважника як інтегрального оператора, результат дії якого на одиничну функцію дорівнює заданій функції. Опрацьовано новий метод розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах, названий рівноважниковим методом.

Ключові слова: ряд Тейлора, інтегральний оператор, перехідний процес, лінійне електричне коло.

Розрахунок перехідних процесів (ПП) у лінійних об'єктах зі сталими параметрами є задачею, яка часто виникає в практиці. Звичайно її формулюють як лінійну задачу Коші, тобто як систему лінійних диференціальних рівнянь (ДР) зі сталими коефіцієнтами, яка описує всі процеси в досліджуваному об'єкті, разом з початковими умовами, які виділяють шуканий ПП з нескінченної множини можливих процесів [1].

Задачі Коші для лінійних систем ДР зі сталими коефіцієнтами звичайно розв'язують операторним методом Гевісайда. Як відомо, цей метод передбачає алгебризацію ДР шляхом заміни оператора d/dt диференціювання за часом комплексною змінною p, відомих і невідомих функцій – їхніми зображеннями Лапласа, а також розв'язування отриманих алгебричних рівнянь (АР) відносно зображень невідомих функцій та перехід від отриманих зображень до оригіналів. У цьому разі на етапі алгебризації потрібно відповідно врахувати початкові умови, оскільки в ДР їх нема.

Виконані протягом останніх років дослідження засвідчили, що формулювання задач розрахунку ПП у вигляді систем інтегральних рівнянь (ІР) має суттєві переваги над їхнім формулюванням у вигляді задач Коші як на концепційному рівні, так і на рівні практичного застосування. Перевага на концепційному рівні полягає, передусім, у тому, що всі необхідні й достатні початкові значення змінних стану об'єкта враховують безпосередньо в ІР, і отже, поняття початкових умов як окремої словесної конструкції та поняття задачі Коші стають зайвими.

Ми доведемо, що опис ПП у лінійних стаціонарних колах за допомогою ІР приводить до нового методу розрахунку, названого ***рівноважниковим методом***

[2], який за сутністю близький до операторного методу Гевісайда, однак має порівняно з ним низку переваг.

Рівноважники. Розглянемо оператор

$$r = \int_0^t dt \tag{1}$$

і назвемо його ***базовим інтегральним оператором***, або, коротко ***інтегральним оператором***. Будемо записувати означений інтеграл в інтервалі $[0,\ t]$ інтегровної функції $f(t)$ у вигляді

$$\int_0^t f(t)dt = \int_0^t dt \cdot f(t) = r \cdot f(t) = rf(t). \tag{2}$$

Назвемо функцію, яка при $-\infty < t < +\infty$ набуває значення, що дорівнює одиниці, ***одиничною функцією*** й позначимо її символом $1(t)$.

Застосуємо інтегральний оператор до одиничної функції, отримаємо функцію

$$r^1 \cdot 1(t) = r \cdot 1(t) = \int_0^t dt \cdot 1(t) = \int_0^t 1(t)dt = t = \frac{t^1}{1!}. \tag{3}$$

Застосуємо інтегральний оператор до функції $\frac{t^1}{1!}$, отримаємо функцію

$$r^2 \cdot 1(t) = r \cdot r \cdot 1(t) = r \cdot t = \int_0^t dt \cdot t = \int_0^t tdt = \frac{t^2}{2!}. \tag{4}$$

Продовжимо цю процедуру й отримаємо загальну формулу

$$r^k \cdot 1(t) = \frac{t^k}{k!}. \tag{5}$$

З неї випливає, що $r^0 \cdot 1(t) = \frac{t^0}{0!} = 1(t)$.

Нехай $f(t)$ є функцією, що має розклад у ряд Тейлора

$$f(t) = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)t + f^{(2)}(0)\frac{t^2}{2!} + ... + f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}, \tag{6}$$

і цей ряд збіжний всюди (тобто при $-\infty < t < +\infty$). Надалі розглядатимемо тільки такі функції. Запишемо функцію (6) з урахуванням (5) у вигляді

$$f(t) = (f^{(0)}(0)r^0 + f^{(1)}(0)r^1 + ... + f^{(k)}(0)r^k + ...)1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(0)r^k \cdot 1(t). \tag{7}$$

Назвемо ряд

$$f_r(r) = f^{(0)}(0)r^0 + f^{(1)}(0)r^1 + ... + f^{(k)}(0)r^k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(0)r^k \tag{8}$$

рівноважником функції $f(t)$. Рівність (7) з урахуванням (8) набуває вигляду

$$f(t) = f_r(r) \cdot 1(t). \tag{9}$$

Згідно з (9) рівноважник $\frac{t^k}{k!}$ функції $f(t)$ є складним інтегральним оператором, який перетворює одиничну функцію в задану функцію $f(t)$, причому коефіцієнти цього перетворення є коефіцієнтами розкладу функції $f(t)$ в ряд Тейлора. Кожній функції $f(t)$ відповідає єдиний рівноважник і кожному рівноважнику відповідає єдина функція $f(t)$.

З наведеного вище випливає, що для отримання рівноважника функції $f(t)$ необхідно цю функцію розкласти в ряд Тейлора і в отриманому ряді замінити вирази вигляду $\frac{t^k}{k!}$ виразами вигляду r^{k}. Наприклад, для функції $e^{-\pm t}$ маємо

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \cdot 1(t) &= 1 - \alpha t + \alpha^2 \frac{t^2}{2!} - \alpha^3 \frac{t^3}{3!} + ... = (1 - \alpha r + \alpha^2 r^2 - \alpha^3 r^3 + ...) \cdot 1(t) = \\ &= \frac{1}{1+\alpha r} \cdot 1(t), \end{aligned} \tag{10}$$

і, отже, функція $\frac{1}{1+\alpha r}$ є рівноважником функції $e^{-\alpha t}$. Очевидно, що $r^0 = 1$ є рівноважником функції $1(t)$; $r^1 = r$ – рівноважником функції t; r^k – рівноважником функції $\frac{t^k}{k!}$. А ось ще декілька прикладів зображення функцій у рівноважниковому вигляді

$$\begin{gathered} e^{-\alpha t} \frac{t^k}{k!} = \frac{r^k}{(1+\alpha r)^{k+1}} 1(t); \quad \cos(\omega t) = \frac{1}{1+(\omega r)^2} 1(t); \quad \sin(\omega t) = \frac{\omega r}{1+(\omega r)^2} 1(t); \\ e^{-\alpha t} \cos(\omega t) = \frac{1+\alpha r}{(1+\alpha r)^2 + (\omega r)^2} 1(t); \quad e^{-\alpha t} \sin(\omega t) = \frac{\omega r}{(1+\alpha r)^2 + (\omega r)^2} 1(t). \end{gathered} \tag{11}$$

Розглянемо функцію

$$g(t) = \int_0^t dt \cdot f(t) = rf(t) = rf_r(r) \cdot 1(t) = g_r(r) \cdot 1(t), \tag{12}$$

де

$$g_r(r) = rf_r(r) \tag{13}$$

– рівноважник функції $g(t)$. Отже, рівноважник інтеграла функції дорівнює добуткові інтегрального оператора й рівноважника цієї функції. Цей висновок є підставою до алгебризації ІР у рівноважниковому методі розв'язування лінійних систем інтегральних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Зазначимо, що в операторному методі Гевісайда алгебризацію ДР виконують на підставі теореми, згідно з якою зображення Лапласа похідної від функції $f(t)$ дорівнює добуткові комплексної змінної p на зображення Лапласа функції $f(t)$ (і це тільки за умови, що $f(0)=0$). В теорії рівноважників аналогічний результат отримують простішим способом.

Рівноважники функцій, як і зображення Лапласа, мають низку загальних властивостей. Для порівняння найважливіші з них наведені в таблиці.

Рівноважники та зображення Лапласа основних функцій

Функція часу	Рівноважник	Зображення Лапласа
$f(ct)$	$f_r(cr)$	$\frac{1}{c}F(\frac{p}{c})$
$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$	$c_1 f_{1r}(r)+c_2 f_{2r}(r)$	$c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$
$\int_0^t \mathrm{d}t\cdot f(t)$	$rf_r(r)$	$\frac{F(p)}{p}$
$\underbrace{\int_0^t dt\cdot\ldots\cdot\int_0^t dt}_{k\text{ разів}}\cdot f(t)$	$r^k f_r(r)$	$\frac{F(p)}{p^k}$
$e^{\alpha t}f(t)$	$\frac{1}{1-\alpha r}f_r(\frac{r}{1-\alpha r}).$	$F(p-\alpha)$
$1(t)$	1	$\frac{1}{p}$
$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!},$	$f_r(r)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(0)r^k$	$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(0)\frac{1}{p^{k+1}}$

Можна довести, що з суто формального погляду рівноважник $f_r(\mathrm{r})$ функції $f(t)$ отримуємо з відображення Лапласа $F(\mathrm{p})$ цієї функції, помноживши це відображення на комплексну змінну p і підставивши в отриманому виразі $p=\frac{1}{r}$, та, навпаки, щоб отримати відображення Лапласа функції, достатньо в її рівноважнику підставити $r=\frac{1}{p}$, а отриманий вираз поділити на p.

Було б, однак, помилкою вважати, що різниця між рівноважником функції та її відображенням Лапласа зводиться до простої заміни символів. Принципові відміності між ними належить шукати на понятійному рівні, і вичерпне їх з'ясування та практичні наслідки, що випливають з цих відмінностей, будуть темою окремої статті. Тут обмежимось формулюваням тільки однієї з них.

Рівноважник $f_{\text{r}}(\text{r})$ функції $f(t)$ як складний інтегральний оператор можна множити не тільки на одиничну функцію $1(t)$ (як у формулі (9)), а й на довільну іншу функцію, наприклад, на функцію $\varphi(t) = \varphi_{\text{r}}(r) \cdot 1(t)$. У результаті отримаємо функцію часу

$$
\begin{aligned}
q(t) &= f_{\text{r}}(r) \cdot \varphi(t) = f_{\text{r}}(r) = (f^{(0)}(0)r^0 + f^{(1)}(0)r^1 + \ldots . f^{(k)}(0)r^k + \ldots)\varphi(t) = \\
&= f^{(0)}(0)\varphi(t) + f^{(1)}(0)r\varphi(t) + \ldots + f^{(k)}(0)r^k\varphi(t) + \ldots = \\
&= f^{(0)}(0)\varphi(t) + f^{(1)}(0)\int_0^t dt \cdot \varphi(t) + \ldots + f^{(k)}(0)\int_0^t dt \cdot \ldots \cdot \int_0^t dt \cdot \varphi(t) + \ldots \ .
\end{aligned}
$$

Отже, добуток рівноважника на функцію часу має конкретний математичний зміст. Натомість добуток відображення Лапласа на функцію часу позбавлений математичного змісту. Іншими словами, *рівноважник є оператором у загальному розумінні цього поняття* (тобто ним можна подіяти на функцію), а *відображення Лапласа не є оператором у загальному розумінні цього поняття*.

Рівноважниковий метод розв'язування лінійних систем інтегральних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо лінійну систему ІР зі сталими коефіцієнтами

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\int_0^t dt \cdot x_1(t) + \ldots + a_{1n}\int_0^t dt \cdot x_n(t) + b_{11}x_1(t) + \ldots + b_{1n}x_n(t) = f_1(t); \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&a_{n1}\int_0^t dt \cdot x_1(t) + \ldots + a_{nn}\int_0^t dt \cdot x_n(t) + b_{n1}x_1(t) + \ldots + b_{nn}x_n(t) = f_n(t),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

де $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ – залежні змінні, які є невідомими функціями незалежної змінної t; a_{jk}, b_{jk} $(j,\ k = 1, \ldots, n)$ – відомі дійсні числа; $f_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ – вільні члени, які є відомими функціями незалежної змінної t. Розв'язок цієї системи ІР – сукупність функцій $x_j = x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, які задовольняють усі рівняння системи ІР (14).

Уведемо вектор вільних членів і вектор залежних змінних системи ІР (14)

$$
\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}; \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}
\tag{15}
$$

і матриці коефіцієнтів цієї системи

$$\hat{a}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \hat{b}=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{16}$$

та запишемо систему n скалярних рівнянь (14) у вигляді одного векторного рівняння

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \int_0^t dt\cdot x_1(t) \\ \vdots \\ \int_0^t dt\cdot x_n(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

або ж

$$\hat{a}\int_0^t dt\cdot\vec{x}(t)+\hat{b}\vec{x}(t)=\vec{f}(t). \tag{17}$$

Інтегральним рівнянням (14) відповідають алгебричні ***рівноважникові рівняння***

$$\begin{gathered} a_{11}rx_{1r}(r)+...+a_{1n}rx_{nr}(r)+b_{11}x_{1r}(r)+...+b_{1n}x_{nr}(r)=f_{1r}(r), \\ \vdots \\ a_{n1}rx_{1r}(r)+...+a_{nn}rx_{nr}(r)+b_{n1}x_{1r}(r)+...+b_{nn}x_{nr}(r)=f_{nr}(r), \end{gathered}$$

або ж

$$\begin{gathered} (a_{11}r+b_{11})x_{1r}(r)+...+(a_{1n}r+b_{1n})x_{nr}(r)=f_{1r}(r), \\ \vdots \\ (a_{n1}r+b_{n1})x_{1r}(r)+...+(a_{nn}r+b_{nn})x_{nr}(r)=f_{nr}(r). \end{gathered} \tag{18}$$

Уведемо вектор рівноважників вільних членів

$$\vec{f}_r(r)=\begin{bmatrix} f_{1r}(r) \\ \vdots \\ f_{nr}(r) \end{bmatrix} \tag{19}$$

як відому векторну функцію інтегрального оператора, яка є рівноважником векторної функції $\vec{f}(t)$, вектор рівноважників залежних змінних

$$\vec{x}_r(r)=\begin{bmatrix} x_{1r}(r) \\ \vdots \\ x_{nr}(r) \end{bmatrix} \tag{20}$$

як невідому векторну функцію інтегрального оператора, яка є рівноважником векторної функції $\vec{x}(t)$, і матрицю

$$\hat{c}(r) = \hat{a}r + \hat{b} = \begin{bmatrix} a_{11}r + b_{11} & \cdots & a_{1n}r + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}r + b_{n1} & \cdots & a_{nn}r + b_{nn} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

запишемо рівняння (18) у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11}r + b_{11} & \cdots & a_{1n}r + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}r + b_{n1} & \cdots & a_{nn}r + b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1r}(r) \\ \vdots \\ rx_{nr}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1r}(r) \\ \vdots \\ f_{nr}(r) \end{bmatrix},$$

або ж

$$\hat{c}(r)\vec{x}_r(r) = \vec{f}_r(r). \tag{22}$$

Якщо матриця (21) є невиродженою, то рівняння (22) має розв'язок

$$\vec{x}_r(r) = \hat{c}^{-1}(r)\vec{f}_r(r)$$

і цей розв'язок є єдиним. Згідно з методом Крамера

$$x_{1r}(r) = \frac{\Delta_1(r)}{\Delta(r)};\ \ldots;\ \ x_{nr}(r) = \frac{\Delta_n(r)}{\Delta(r)}, \tag{23}$$

де

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} a_{11}r + b_{11} & \cdots & a_{1n}r + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}r + b_{n1} & \cdots & a_{nn}r + b_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1(r) = \begin{vmatrix} f_{1r}(r) & \cdots & a_{1n}r + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{nr}(r) & \cdots & a_{nn}r + b_{nn} \end{vmatrix};\ \ldots;\ \Delta_n(r) = \begin{vmatrix} a_{11}r + b_{11} & \cdots & f_{1r}(r) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}r + b_{n1} & \cdots & f_{nr}(r) \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Алгоритм розв'язування системи ІР (14) рівноважниковим методом передбачає таке:

- зображення цієї системи в рівноважниковому вигляді (22);
- обчислення визначника $\Delta(r)$ і визначників $\Delta_1(r), \ldots, \Delta_n(r)$ як функцій від оператора r з числовими коефіцієнтами;
- обчислення рівноважників $x_{1r}(r), \ldots, x_{nr}(r)$ за формулами (23) з наступним їх зведенням до сум багаточленів і простих дробів від оператора r;
- записання невідомих $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ як функцій незалежної змінної t безпосередньо за їхніми рівноважниками.

Рівноважниковий метод розрахунку перехідних процесів в електричних колах зі сталими параметрами. Проілюструємо застосування рівноважникового методу на прикладі розрахунку ПП в електричному колі, зображеному на рис. 1, прийнявши, що напруги джерел є функціями

$$u_1(t) = U_0 + U_1 t + U_2 \frac{t^2}{2!}; \quad u_2(t) = U_c \cos(\omega t); \quad u_3(t) = U_e e^{-\gamma t}, \tag{25}$$

і при $t = 0$ напруги на конденсаторах та потокозчеплення навоїв

$$u_{C1}(0) = u_{C10}; \quad u_{C3}(0) = 0; \quad \psi_1(0) = \psi_{10}; \quad \psi_2(0) = 0, \tag{26}$$

де i_{10}, u_{C20}, U_0, U_1, U_2, U_c, U_e, ω, γ – відомі числа.

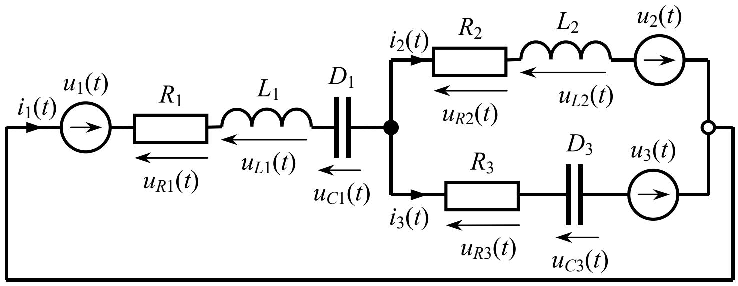

Рис. 1. Схема розгалуженого електричного кола.

ПП у цьому колі описують системою рівнянь

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0; \tag{27}$$

$$u_{R1}(t) + u_{L1}(t) + u_{C1}(t) - U_0 - U_1 t - U_2 \frac{t^2}{2!} + u_{R2}(t) + u_{L2}(t) - U_c \cos(\omega t) = 0; \tag{28}$$

$$u_{R1}(t) + u_{L1}(t) + u_{C1}(t) - U_0 - U_1 t - U_2 \frac{t^2}{2!} + u_{R3}(t) + u_{C3}(t) - U_e e^{-\gamma t} = 0; \tag{29}$$

$$u_{C1}(t) = D_1 \int_0^t dt \cdot i_1(t) + u_{C10}; \qquad u_{C3}(t) = D_3 \int_0^t dt \cdot i_3(t); \tag{30}$$

$$u_{R1}(t) = R_1 i_1(t); \quad u_{R2}(t) = R_2 i_2(t); \quad u_{R3}(t) = R_3 i_3(t); \tag{31}$$

$$\psi_1(t) = \int_0^t dt \cdot u_{L1}(t) + \psi_{10}; \quad \psi_2(t) = \int_0^t dt \cdot u_{L2}(t); \tag{32}$$

$$\psi_1(t) = L_1 i_1(t); \qquad \psi_2(t) = L_2 i_2(t), \tag{33}$$

де D_1, D_3 – еластанси конденсаторів. Система (27)–(33) складається з восьми алгебричних та чотирьох інтегральних рівнянь і містить 12 невідомих функцій часу $i_1(t),\ i_2(t),\ i_3(t),\ u_{R1}(t),\ u_{R2}(t),\ u_{R3}(t),$ $u_{L1}(t),\ u_{L2}(t),\ u_{C1}(t),\ u_{C1}(t),\ \psi_1(t),\ \psi_2(t).$

Згідно з формулами (5), (10), (11), рівноважники відомих функцій (25)

$$u_{1r}(r)=U_0+U_1r+U_2r^2;\quad u_{2r}(r)=U_c\frac{1}{1+(\omega r)^2};\quad u_{3r}(r)=U_e\frac{1}{1+\gamma r}.$$

Позначимо рівноважники невідомих функцій, відповідно, як $i_{r1}(r),\ i_{r2}(r),\ i_{r3}(r),\ u_{rR1}(r),\ u_{rR2}(r),$ $u_{rR3}(r),\ u_{rL1}(r),\ u_{rL2}(r),\ u_{rC1}(r),\ u_{rC2}(r),$ отримаємо рівноважникові рівняння

$$-i_{3r}(r)+i_{1r}(r)+i_{2r}(r)=0; \tag{34}$$

$$\begin{gathered}u_{R1r}(r)+u_{L1r}(r)+u_{C1r}(r)-U_0-U_1r-U_2r^2+u_{R2r}(r)+u_{L2r}(r)-\\-U_c\frac{1}{1+(\omega r)^2}=0;\end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered}u_{R1r}(r)+u_{L1r}(r)+u_{C1r}(r)-U_0-U_1r-U_2r^2+u_{R3r}(r)+u_{C3r}(r)-\\-U_e\frac{1}{1+\gamma r}=0;\end{gathered} \tag{36}$$

$$u_{C1r}(r)=D_1ri_{1r}(r)+u_{C10};\quad u_{C3r}(r)=D_3ri_{3r}(r); \tag{37}$$

$$u_{R1r}(r)=R_1i_{1r}(r);\quad u_{R2r}(r)=R_2i_{2r}(r);\quad u_{R3r}(r)=R_3i_{3r}(r); \tag{38}$$

$$\psi_{1r}(r)=ru_{L1r}(r)+\psi_{10};\qquad \psi_{2r}(r)=ru_{L2r}(r); \tag{39}$$

$$\psi_{1r}(r)=L_1i_{1r}(r);\qquad \psi_{2r}(r)=L_2i_{2r}(r). \tag{40}$$

З рівнянь випливають формули

$$u_{L1r}(r)=\frac{L_1i_{1r}(r)}{r}-\frac{\psi_{10}}{r};\qquad u_{L2r}(r)=\frac{L_2i_{2r}(r)}{r}. \tag{41}$$

Рівнянням (34)–(41) відповідає ***рівноважникова схема***, зображена на рис. 2.

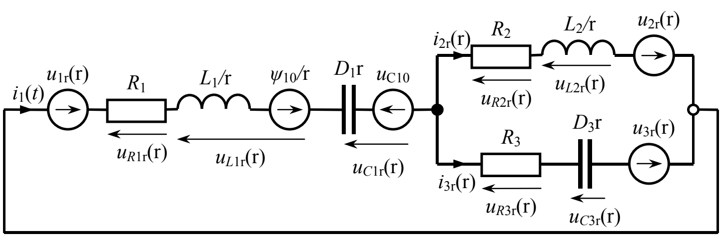

Рис. 2. Рівноважникова схема кола з рис. 1

Вилучимо в рівняннях (34)–(36) невідомі $u_{C1r}(r),\ u_{C3r}(r),\ u_{R1r}(r),\ u_{R2r}(r),$ $u_{R3r}(r),\ \psi_{1r}(r),\ \psi_{2r}(r),\ u_{L1r}(r),\ u_{L2r}(r)$, згідно з формулами (37), (38)–(41), отримаємо систему рівнянь

$$-i_{1r}(r)+i_{2r}(r)+i_{3r}(r)=0;$$
$$(D_1r+R_1+\frac{L_1}{r})i_{1r}(r)+(R_2+\frac{L_2}{r})i_{2r}(r)=-u_{C10}+\frac{\psi_{10}}{r}+U_0+U_1r+U_2r^2+\frac{U_c}{1+(\omega r)^2};$$
$$(D_1r+R_1+\frac{L_1}{r})i_{1r}(r)+(R_3+D_3r)i_{3r}(r)=-u_{C10}+\frac{\psi_{10}}{r}+U_0+U_1r+U_2r^2+\frac{U_e}{1+\gamma r},$$

яка містить невідомі функції $i_{1r}(r),\ i_{2r}(r),\ i_{3r}(r)$. Запишемо її в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ D_1r+R_1+\frac{L_1}{r} & R_2+\frac{L_2}{r} & 0 \\ D_1r+R_1+\frac{L_1}{r} & 0 & D_3r+R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{1r}(r) \\ i_{2r}(r) \\ i_{3r}(r)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} 0 \\ -u_{C10}+\frac{\psi_{10}}{r}+U_0+U_1r+U_2r^2+\frac{U_c}{1+(\omega r)^2} \\ -u_{C10}+\frac{\psi_{10}}{r}+U_0+U_1r+U_2r^2+\frac{U_e}{1+\gamma r}\end{bmatrix}. \qquad (42)$$

Розв’язок системи рівнянь (42) має вигляд

$$i_{1r}(r)=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad i_{2r}(r)=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad i_{3r}(r)=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (43)$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ D_1r+R_1+\frac{L_1}{r} & R_2+\frac{L_2}{r} & 0 \\ D_1r+R_1+\frac{L_1}{r} & 0 & D_3r+R_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -u_{C10} + \dfrac{\psi_{10}}{r} + U_0 + U_1 r + U_2 r^2 + \dfrac{U_c}{1+(\omega r)^2} & R_2 + \dfrac{L_2}{r} & 0 \\ -u_{C10} + \dfrac{\psi_{10}}{r} + U_0 + U_1 r + U_2 r^2 + \dfrac{U_e}{1+\gamma r} & 0 & D_3 r + R_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ D_1 r + R_1 + \dfrac{L_1}{r} & -u_{C10} + \dfrac{\psi_{10}}{r} + U_0 + U_1 r + U_2 r^2 + \dfrac{U_c}{1+(\omega r)^2} & 0 \\ D_1 r + R_1 + \dfrac{L_1}{r} & -u_{C10} + \dfrac{\psi_{10}}{r} + U_0 + U_1 r + U_2 r^2 + \dfrac{U_e}{1+\gamma r} & D_3 r + R_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ D_1 r + R_1 + \dfrac{L_1}{r} & R_2 + \dfrac{L_2}{r} & -u_{C10} + \dfrac{\psi_{10}}{r} + U_0 + U_1 r + U_2 r^2 + \dfrac{U_c}{1+(\omega r)^2} \\ D_1 r + R_1 + \dfrac{L_1}{r} & 0 & -u_{C10} + \dfrac{\psi_{10}}{r} + U_0 + U_1 r + U_2 r^2 + \dfrac{U_e}{1+\gamma r} \end{vmatrix}.$$

Далі розв’язуватимемо задачу для числових даних

$R_1 = 10;\quad R_2 = 20;\quad R_3 = 30;\quad L_1 = 0,001;\quad L_2 = 0,004;$

$D_1 = 1000;\quad D_3 = 5000;\quad \psi_{10} = 0,002;\quad u_{C10} = 20;$

$U_0 = 100;\quad U_1 = 1000;\quad U_2 = 10000;\quad U_c = 30;\quad U_e = 50;$

$\omega = 314;\quad \gamma = 80.$

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1000r + 10 + \dfrac{0,001}{r} & 20 + \dfrac{0,004}{r} & 0 \\ 1000r + 10 + \dfrac{0,001}{r} & 0 & 5000r + 30 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{r^2}(5000000r^4 + 200000r^3 + 1129r^2 + 0,21r + 0,000004);$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -20+\dfrac{0,002}{r}+100+1000r+10000r^2+\dfrac{30}{1+(314r)^2} & 20+\dfrac{0,004}{r} & 0 \\ -20+\dfrac{0,002}{r}+100+1000r+10000r^2+\dfrac{50}{1+80r} & 0 & 5000r+30 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(1+(314r)^2)(1+80r)r^2}\times$$
$$\times(-3,94\cdot 10^{14}r^8-4,83\cdot 10^{13}r^7-4,89\cdot 10^{12}r^6-9,26\cdot 10^{10}r^5-6,21\cdot 10^8 r^4-$$
$$-1,02\cdot 10^6 r^3-6,56\cdot 10^3 r^2-1,41r+1,6\cdot 10^{-4});$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1000r+10+\dfrac{0,001}{r} & -20+\dfrac{0,002}{r}+100+1000r+10000r^2+\dfrac{30}{1+(314r)^2} & 0 \\ 1000r+10+\dfrac{0,001}{r} & -20+\dfrac{0,002}{r}+100+1000r+10000r^2+\dfrac{50}{1+80r} & 5000r+30 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(1+(314r)^2)(1+80r)r}\times$$
$$\times(-3,94\cdot 10^{14}r^7-4,67\cdot 10^{13}r^6-4,71\cdot 10^{12}r^5-6,99\cdot 10^{10}r^4)\times$$
$$\times(-2,79\cdot 10^8 r^3-8,57\cdot 10^5 r^2-3,41\cdot 10^3 r+1,22);$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1000r+10+\dfrac{0,001}{r} & 20+\dfrac{0,004}{r} & -20+\dfrac{0,002}{r}+100+1000r+10000r^2+\dfrac{30}{1+(314r)^2} \\ 1000r+10+\dfrac{0,001}{r} & 0 & -20+\dfrac{0,002}{r}+100+1000r+10000r^2+\dfrac{50}{1+80r} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(1+(314r)^2)(1+80r)r}\times$$
$$\times(-1,58\cdot 10^{12}r^7-1,78\cdot 10^{11}r^6-2,28\cdot 10^{10}r^5-3,42\cdot 10^8 r^4)\times$$
$$\times(-1,6\cdot 10^5 r^3-3,15\cdot 10^3 r^2+0,193r+1,6\cdot 10^{-4}).$$

Поділимо визначник Δ_1 на визначник Δ і розкладемо отриманий правильний дріб на прості дроби, отримаємо рівноважник струму в першій гілці

$$i_{1r}(r) = 7 + 10r + \frac{0,882}{1+(314r)^2} + \frac{0,0093\cdot(314r)}{1+(314r)^2} - \frac{1,62}{1+80r} + \frac{2,23}{1+30,1r} + \frac{4,33}{1+152r} -$$
$$-\frac{16,2}{1+5880r} + \frac{10,5}{1+46500r}.$$

Отже, струм у першій гілці, згідно з формулами (5), (10), (11),

$$i_1(t) = 7 + 10t + 0,882\cos(314t) + 0,0093\sin(314t) - 1,62e^{-80t} +$$
$$+2,23e^{-30,1t} + 4,33e^{-152t} - 16,2e^{-5880t} + 10,5e^{-46500t}.$$

Поділимо визначник Δ_2 на визначник Δ і розкладемо отриманий правильний дріб на прості дроби, отримаємо рівноважник струму в другій гілці

$$i_{2r}(r) = 0,66 + 10r - \frac{1,09}{1+(314r)^2} + \frac{0,0516\cdot(314r)}{1+(314r)^2} - \frac{0,213}{1+80r} + \frac{2,61}{1+30,1r} -$$
$$-\frac{0,735}{1+152r} - \frac{11,5}{1+5850r} + \frac{8,79}{1+46500r}.$$

Отже, струм у другій гілці

$$i_2(t) = 0,66 + 10t - 1,09\cos(314t) + 0,0516\sin(314t) - 0,213e^{-80t} +$$
$$+2,61e^{-30,1t} - 0,735e^{-152t} - 11,5e^{-5880t} + 8,79e^{-46500t}.$$

Струм у третій гілці обчислюємо аналогічним способом або ж за формулою $i_3(t) = \; = i_1(t) - i_2(t)$.

Напруги на конденсаторах можна обчислити за їхніми рівноважниками, отриманими шляхом підставляння рівноважників струмів до формул (37), або ж підставити отримані вирази струмів гілок як функцій часу у формули (30) і виконати інтегрування. Напруги на навоях можна обчислити за їхніми рівноважниками, отриманими шляхом підставляння рівноважників струмів до формул (41), або ж підставити отримані вирази струмів гілок як функцій часу у формули

$$u_{L1}(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dt} = L_1\frac{di_1(t)}{dt};\; u_{L2}(t) = \frac{d\psi_2(t)}{dt} = L_2\frac{di_2(t)}{dt}.$$

З наведеного вище випливає, що рівноважниковий метод має низку переваг над операторним методом Гевісайда, зокрема:

одиниця вимірювання рівноважника функції $f(t)$ дорівнює одиниці вимірювання цієї функції, тоді як одиниця вимірювання зображення Лапласа є добутком одиниць вимірювання функції і часу;

початкове значення $f(0)$ функції $f(t)$ дорівнює початковому значенню $f_{\text{r}}(0)$ її рівноважника, тоді як в операторному методі $f(0) = \lim\limits_{\text{p}\to\infty} \text{p}F(\text{p})$;

рівноважник $f_r(r)$ функції часу $f(t)$ є складним інтегральним оператором, що перетворює одиничну функцію $1(t)$ на задану функцію $f(t)$, і, отже, він, на противагу зображенню Лапласа $F(\text{p})$ функції часу $f(t)$, має простий і наочний математичний зміст;

рівноважник функції $f(t)$ однозначно окреслює цю функцію при $-\infty < t < +\infty$, тоді як зображення Лапласа $F(\text{p})$ окреслює її тільки при $t > 0$;

У разі поліноміальних збурень вигляду $f(t) = U_0 + U_1 t + ... + U_k \frac{t^k}{k!}$ їхні зображення Лапласа мають вигляд $F(p) = \frac{U_0}{p} + \frac{U_1}{p^2} + ... + \frac{U_k}{p^{k+1}}$, і тоді знаменники зображень Лапласа відповідей мають кратні нульові корені, що створює додаткові труднощі у випадку розкладання цих зображень на прості дроби, тоді як рівноважники таких збурень мають вигляд $f_r(r) = U_0 + U_1 r + ... + U_k r^k$, тому в рівноважниковому методі згадані труднощі не виникають.

Отже, уведення поняття базового інтегрального оператора та поняття рівноважника функції часу як складного інтегрального оператора, що перетворює одиничну функцію на задану функцію, дає змогу алгебризувати інтегральні рівняння, які описують перехідні процеси в лінійних стаціонарних електричних колах, шляхом формальної заміни оператора інтегрування базовим інтегральним оператором та відомих і невідомих функцій їхніми рівноважниками.

Опрацьований метод розрахунку перехідних процесів у лінійних стаціонарних колах, названий рівноважниковим методом, є концепційно значно простішим порівняно з операторним методом Гевісайда і в практичній реалізації ефективнішим, зокрема, за наявності в колі збурень, що є поліноміальними функціями часу.

1. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965.
2. *Filc. R.* Equivalents Method for Linear Circuits Transients Calculation // Proceedings of International Conference on Modern Problems of Telecommunications, Computer Science and Engineers Training. TCSET'2002, Lviv–Slavsko. February 18–22 2002. Lviv, 2002. P. 18–23.

METHOD FOR LINEAR CIRCUITS TRANSIENTS CALCULATION

R. Filc

National University Lviv Polytechnic
Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine

The notion of equivalent of a function developable into Taylor series convergent over the interval $-\infty < \text{t} < +\infty$ has been introduced. Equivalents method for linear circuit transients calculation has been developed.

Key words: Taylor series, integral operator, transient process, linear electric circuit.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005
Прийнята до друку 01.09.2005