ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2005. Вип. 58. С. 15-19 *2005. Is. 58. P. 15-19*

УДК 621.313.33

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ BUCK-КОНВЕРТОРА

І. Романів, Л. Синицький

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. генерала Тарнавського, 107, Львів 79017, Україна
romaniv@rd.wups.lviv.ua

Побудовано математичну модель перетворювача постійної напруги в постійну типу buck-конвертор. Знайдено аналітичний розв'язок для такої моделі. Отримано значення вектора розв'язку для стаціонарного режиму. Виведено необхідну та достатню умови стійкості buck-конвертора.

Ключові слова: buck-конвертор, математична модель, стаціонарний режим.

Широке застосування стабілізаторів напруги з використанням імпульсного комутатора зумовлене досить високим порівняно з послідовною аналоговою стабілізацією коефіцієнтом корисної дії, яка досягає близько 80%. Середнє значення вихідної напруги в такій схемі (див. рисунок) регульоване тим, що ключ S періодично відкривається та закривається, а відношення часу його відкритого стану до періоду повторення можна регулювати. Такі стабілізатори називають вторинними, бо їх використовують переважно у вторинних колах випрямлячів. Про актуальність створення моделей для аналізу таких систем свідчить опублікована останнім часом велика кількість статей на цю тематику [2, 3].

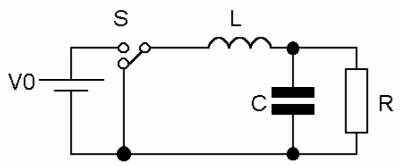

Схема buck-конвертора.

Побудуємо математичну модель такої схеми. Нехай $x_1 = U_c / U_{зр}$; $\theta = t / T$; $x_2 = I_L / (U_{зр} / R)$, де $U_{зр}$ – напруга на виході схеми; T – період комутації ключа S; U_c, I_L – напруга на конденсаторі і струм через індуктивність, відповідно; θ – безрозмірний час $0 < \theta < 1$. Позначимо $\alpha = T / RC$; $\beta = T / (L / R)$; $U = V_0 / U_{зр}$.

У загальному вигляді математичну модель можна записати як

$$\dot{X} = A \times X + b \times U \,, \tag{1}$$

де матриця параметрів схеми $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$; вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; вектор $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ у разі ввімкнення V_0 і $0 < \theta < d$ та $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ у разі вимкнення V_0 і $d < \theta < 1$.

Систему (1) можна розв'язати на кожній з ділянок увімкнення і вимкнення напруги V_0 та зшити розв'язки в точці θ_0.

У праці [2] побудована загальна дискретизована за часом математична модель таких схем:

$$x_{k+1} = F(d_k) \times x_k + G(d_k) \times U_k , \tag{2}$$

де x – вектор, $U_k = U$ для всіх $k \cdot T \le t < (k+1) \cdot T$, а вхідні нелінійні матриці F і G визначені як

$$\begin{aligned} F(d) &= \Phi_2[1-d] \cdot \Phi_1[d] \ , \\ G(d) &= \Phi_2[1-d] \cdot \Gamma_1[d] + \Gamma_2[1-d] \ , \end{aligned} \tag{3}$$

відповідно, $\Phi_i[\theta] = \exp(A_i \cdot \theta)$, $\Gamma_i[\theta] = \int_0^\theta \exp(A_i \cdot \tau) \cdot b_i d\tau$.

Для buck-конверторів матриці $A_1 = A_2$, оскільки матриця **A** в разі ввімкнення–вимкнення ключа K не змінюється. Відповідні вектори включення b_i мають вигляд $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ та $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тоді $\Phi_1[d] = \exp(A \times d)$; $\Phi_2[1-d] = \exp(A \cdot (1-d))$; $\Gamma_1[d] = A^{-1} \times [\exp(A \times d) - I] \times b_1$; $\Gamma_2[1-d] = 0$, де I – одинична матриця.

Отже, вхідні нелінійні матриці після перетворень, згідно з рівностями (3), запишемо так:

$$\begin{aligned} F(d) &= \exp A, \\ G(d) &= (\exp A - \exp A(1-d)) \cdot A^{-1} \cdot b_1 . \end{aligned} \tag{4}$$

З іншого боку, матрицю $F(d)$ можна записати як розв'язок системи (1) за початкових двох значень вектора x: $x_{\text{поч1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $x_{\text{поч2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді розв'язки системи (1) на ділянках $[0, \theta_0]$ та $[\theta_0, 1]$ зшиваємо в точці θ_0, виходячи з неперервності розв'язків x_1, x_2 при $\theta = \theta_0$:

$$\exp(A) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_2} - \lambda_1 e^{\lambda_1} & \alpha\left(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}\right) \\ \beta\left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}\right) & \lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

відповідно, для

$$\exp(A\cdot(\gamma))=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_2 e^{\lambda_2\cdot\gamma}-\lambda_1 e^{\lambda_1\cdot\gamma} & \alpha\left(e^{\lambda_2\cdot\gamma}-e^{\lambda_1\cdot\gamma}\right)\\ \beta\left(e^{\lambda_1\cdot\gamma}-e^{\lambda_2\cdot\gamma}\right) & \lambda_2 e^{\lambda_1\cdot\gamma}-\lambda_1 e^{\lambda_2\cdot\gamma}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $\gamma=1-d$ а λ_1 та λ_2 – розв'язки характеристичного рівняння системи (1), що відповідно, $\lambda_{1;2}=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\alpha\beta}=-\sigma\pm j\cdot\omega$. Оскільки $\frac{\alpha}{4}<\beta$, тобто $4\cdot R\cdot C>\frac{L}{R}$, то добротність нашої системи $Q<2$. Отже, аналізований нами buck- конвертор є низькодобротним контуром, для якого $\omega<\sigma$, або $\omega<\frac{\alpha}{2}$.

Виконаємо нескладні математичні перетворення, та, вважаючи правильними для нашої схеми співвідношення $\cos(\omega)\approx 1$ та $\frac{\sin(\omega)}{\omega}\approx 1$, оскільки $\alpha<<1$, а отже, і $\omega<<1$, отримаємо для матриць (5) і (6) такі спрощені вирази:

$$\exp(A)=e^{-\sigma}\begin{pmatrix}1-\frac{\alpha}{2} & \alpha\\ -\beta & 1+\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$\exp(A\cdot(\gamma))=e^{-\gamma\sigma}\cdot\begin{pmatrix}1-\gamma\cdot\frac{\alpha}{2} & \alpha\\ -\beta & 1+\gamma\cdot\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Зробимо ще одне перетворення у виразах (7) та (8), замінивши $\exp(-\sigma)\approx 1-\sigma=1-\frac{\alpha}{2}$ і $\exp(-\gamma\cdot\sigma)\approx 1-\gamma\cdot\sigma=1-\frac{\gamma\cdot\alpha}{2}$ та, знехтувавши величинами порядку α^2, одержимо

$$\exp(A)=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ -\beta\cdot\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & 1\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\exp(A\cdot(\gamma))=\begin{pmatrix}1-\gamma\cdot\alpha & \alpha\\ -\beta\cdot\left(1-\gamma\cdot\frac{\alpha}{2}\right) & 1\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тепер остаточно можна записати вирази для матриць F і G:

$$F(d) = \exp A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ -\beta \times \left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) & 1 \end{pmatrix};$$

$$G(d) = (\exp A - \exp A(1-d)) \times A^{-1} \times b_1 = d \times \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Для наочності запишемо систему різницевих рівнянь для вектора x:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= (1-\alpha) \cdot x_{1,k} + \alpha \cdot x_{2,k} + \alpha \cdot d \cdot U; \\ x_{2,k+1} &= -\beta \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot x_{1,k} + x_{2,k} - \frac{\alpha \cdot \beta}{2} \cdot d \cdot U. \end{aligned} \tag{11}$$

Спробуємо знайти значення вектора x для стаціонарного режиму рівняння (2). Умова стаціонарного режиму $x_{i,k+1} = x_{i,k} = \bar{x}_i$. Для закону керування вигляду $d_k = c \cdot \left(x_{2,k} - \bar{x}\right)$, де $\bar{x}$ – очікувана (задана) напруга на виході конвертора, і при $U_k = U$, оскільки напруга на вході системи є постійною, отримаємо такі значення вектора x в стаціонарному режимі:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\alpha}{2} \times \frac{U \times c}{1 + U \times c - \dfrac{\alpha}{2}} \times \bar{x}, \\ \bar{x}_2 &= \frac{U \times c}{1 + U \times c - \dfrac{\alpha}{2}} \times \bar{x}. \end{aligned} \tag{12}$$

Результати числового моделювання buck-конвертора за допомогою пакета прикладних програм Matlab повністю збігаються зі значеннями вектора x у стаціонарному режимі, обчисленими за формулою (12).

Дослідимо стійкість нашої системи. Необхідна і достатня умова стійкості системи лінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x_{k+1} = C \cdot x_k \tag{13}$$

зводиться до того, що власні значення матриці C повинні за модулем бути менші від одиниці [1]. Необхідна умова стійкості для матриці C довільного розміру – $|\det C| < 1$; для матриці розміру 2×2 необхідна і достатня умови зводяться до нерівності

$$|p| < 1 + q\,, \tag{14}$$

де $p = TrC,\ q = \det C$. Величина Tr означає слід матриці.

У нашому випадку

$$p = 1 - \alpha + 1 = 2 - \alpha;$$

$$q = \begin{vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ -\beta \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha + \alpha \cdot \beta \cdot (1 - \frac{\alpha}{2}).$$

Згідно з нерівністю (14)

$$2 - \alpha < 2 - \alpha + \alpha \cdot \beta \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Як бачимо, необхідна та достатня умови стійкості системи різницевих рівнянь (13), які описують buck-конвертор, виконуються.

Отже, розглянутий нами buck-конвертор можна описати системою різницевих рівнянь, для якої виконуються необхідна та достатня умови стійкості, а значення x_2 на виході системи за малих значень параметра α близьке до бажаного (заданого) значення $\bar{x}$ напруги на виході buck-конвертора.

---

1. *Демидович Б.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1976. 368 с.
2. *Al-Numay M.S., Taylor D.G.* Digital Tracking control for PWM System with Unacceptable Zeros // IEEE Transacions ou Circuits and Systems. 1998. Vol. 45. N 4. P. 397–408.
3. *Dong Dai, Chi K. Tse, Xikui Ma.* Symbolic Analysis of Switching Systems: Application to Bifurcation Analysis of DC/DC Switching Converters // IEEE Transacions ou Circuits and Systems. 2005. Vol. 52. N. 8. P. 1632–1643.

MATHEMATICAL MODEL OF THE BUCK-CONVERTER

I. Romaniv, L. Sinitsky

Ivan Franko Lviv National University
Tarnavsky Str., 107, Lviv 79017, Ukraine
e-mail: romaniv@rd.wups.lviv.ua

The mathematical model of the buck-converter is constructed. There has been found the solution of such a model. The value of the solution vector under steady-state conditions is determined. The requirement and sufficient condition of the converter stability are derived.

Key words: buck-converter, mathematical model, steady-state conditions.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005
Прийнята до друку 01.09.2005