

УДК 621.372

ВПЛИВ НЕГАУСОВОСТІ РОЗПОДІЛУ ФАЗОВОЇ ПОХИБКИ НА ЯКІСТЬ СИНХРОНІЗАЦІЇ ТА ГРАНИЧНУ ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ ФАПЧ

А. Бондарев, О. Лазько, Л. Недоступ

*Національний університет "Львівська політехніка"
вул. Ст. Бандери, 12, Львів 79013, Україна
lazko_new@yahoo.com*

Доведено, що врахування негаусовості розподілу фазової похибки в системі синхронізації дає змогу значно підвищити точність оцінки якості синхронізації. Отримані границі стійкості систем кумулянтних рівнянь допомагають оцінити граничну завадостійкість синхронізації.

Ключові слова: негаусовий розподіл, фазова похибка, кумулянти.

Пристрій ФАПЧ (фазова автопідстройка частоти) є оптимальним фільтром для гармонічного сигналу з флуктуаціями фази і частоти на фоні білого шуму. Цей пристрій – невіддільна складова частина сучасних приймачів радіосигналів, він визначає якість та саму можливість приймання. Проте аналіз ФАПЧ під дією шуму ускладнює числове розв'язування рівнянь у часткових похідних або розгляд великої кількості реалізацій випадкового процесу. Тому розробка спрощених методів аналізу пристроїв синхронізації в шумах та визначення достовірності цих методів є актуальними для проектування завадостійких пристроїв синхронізації.

Найпривабливішим спрощеним методом аналізу випадкових процесів є кумулянтний аналіз [3], за допомогою якого отримані аналітичні вирази для похибки синхронізації в пристроях ФАПЧ першого [5] і другого [4] порядків, а також недоступні для класичних методів результати аналізу граничної завадостійкості [2] і сукупної дії детермінованої і випадкової завади [1]. Однак ці результати отримані за припущення про гаусів розподіл фазової похибки, тобто з урахуванням лише перших двох кумулянтів. Аналізу впливу вищих кумулянтів та детального порівняння з точними методами аналізу не наведено.

Наше завдання – виявлення впливу негаусовості розподілу фазової похибки на якість синхронізації шляхом урахування кумулянтів розподілу до четвертого включно. З метою детального порівняння з точними методами об'єктом аналізу обрано пристрій синхронізації першого порядку, для якого існує аналітичний вираз розподілу фазової похибки.

Математичною моделлю динамічної безфільтрового пристрою ФАПЧ під впливом шуму є стохастичне рівняння

$$dx/d\tau = \gamma - \sin x + \sqrt{N}n_0(t) = f(x) + \sqrt{N}n_0(t), \quad (1)$$

де τ – нормований час; x – фазова похибка синхронізації; γ – нормоване початкове розузгодження частот; N – відношення потужностей шуму і сигналу в смузі утримання; n_0 – δ -корельований випадковий процес з одиничним енергетичним спектром; $f(x)$ – функція нелінійного перетворення. Відповідно до [1] рівняння еволюції перших чотирьох кумулянтів в ексцесному наближенні мають вигляд

$$\begin{cases} d\kappa_1 / d\tau = \langle f(x) \rangle; \\ d\kappa_2 / d\tau = 2\langle x, f(x) \rangle + N; \\ d\kappa_3 / d\tau = 3\langle x, x, f(x) \rangle; \\ d\kappa_4 / d\tau = 4\langle x, x, x, f(x) \rangle, \end{cases} \quad (2)$$

де кумулянти κ_1, κ_2 є середнім значенням та дисперсією фазової похибки; κ_3, κ_4 – вищі кумулянти (причому асиметрія становить $\kappa_3/\kappa_2^{3/2}$, а ексцес κ_4/κ_2^2); $\langle \dots \rangle$ – кумулянтна дужка А.Н. Малахова. Розкриємо кумулянтні дужки, отримаємо

$$\begin{cases} \langle x, f(x) \rangle = \langle f^I \rangle \kappa_2 + \langle f^{II} \rangle \kappa_3 / 2 + \langle f^{III} \rangle \kappa_4 / 6; \\ \langle x, x, f(x) \rangle = \langle f^I \rangle \kappa_3 + \langle f^{II} \rangle (\kappa_4 + 2\kappa_2^2) / 2 + \langle f^{III} \rangle \kappa_2 \kappa_3 + \langle f^{IV} \rangle (\kappa_2 \kappa_4 / 3 + \\ \quad + \kappa_3^2 / 4) + \langle f^V \rangle \kappa_3 \kappa_4 / 6 + \langle f^{VI} \rangle \kappa_4^2 / 36; \\ \langle x, x, x, f(x) \rangle = \langle f^I \rangle \kappa_4 + 3\langle f^{II} \rangle \kappa_2 \kappa_3 + \langle f^{III} \rangle (3\kappa_2 \kappa_4 / 2 + 3\kappa_3^2 / 2 + \kappa_2^3) + \\ \quad + \langle f^{IV} \rangle (5\kappa_2 \kappa_4 / 4 + 3\kappa_2^2 \kappa_3 / 2) + \langle f^V \rangle (\kappa_4^2 / 4 + \kappa_2^2 \kappa_4 / 2 + 3\kappa_2 \kappa_3^2 / 4) + \\ \quad + \langle f^{VI} \rangle (\kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 / 2 + \kappa_3^3 / 8) + \langle f^{VII} \rangle (\kappa_2 \kappa_4^2 / 12 + \kappa_3^2 \kappa_4 / 8) + \\ \quad + \langle f^{VIII} \rangle \kappa_3 \kappa_4^2 / 24 + \langle f^{IX} \rangle \kappa_4^3 / 216. \end{cases} \quad (3)$$

Після врахування повторюваності похідних функції $f(x) = \gamma - \sin(x)$ вирази (3) набувають вигляду

$$\begin{cases} \langle x, f(x) \rangle = \langle \sin(x) \rangle \kappa_2 + \langle \cos(x) \rangle (\kappa_4 / 6 - \kappa_2); \\ \langle x, x, f(x) \rangle = \langle \sin(x) \rangle (\kappa_3 / 2 + \kappa_2^2 - \kappa_2 \kappa_4 / 3 - \kappa_3^2 / 4 + \kappa_4^2 / 36) + \langle \cos(x) \rangle \\ \quad (\kappa_3 - \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_4 / 6); \\ \langle x, x, x, f(x) \rangle = \langle \sin(x) \rangle (3\kappa_2 \kappa_3 + 5\kappa_2 \kappa_4 / 4 - 3\kappa_2^2 \kappa_3 / 2 + \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 / 2 + \kappa_3^3 / 8 - \\ \quad - \kappa_3 \kappa_4^2 / 24) - \langle \cos(x) \rangle (\kappa_4 - 3\kappa_2 \kappa_4 / 2 - 3\kappa_3^2 / 2 - \kappa_2^3 + \kappa_4^2 / 4 + \kappa_2^2 \kappa_4 / 2 + \\ \quad + 3\kappa_2 \kappa_3^2 / 4 - \kappa_2 \kappa_4^2 / 12 - \kappa_3^2 \kappa_4 / 8 + \kappa_4^3 / 216), \end{cases} \quad (4)$$

де $\langle \sin(x) \rangle, \langle \cos(x) \rangle$ – усереднення відповідних функцій згідно із прийнятими припущеннями щодо розподілу фазової похибки $W(x)$. Для врахування впливу вищих кумулянтів приймемо, що $W(x)$ є ексцесним модельним розподілом, який заданий рядом Еджворта четвертого порядку:

$$W_4(x) = W_2(x) - \frac{\kappa_3}{6} \frac{d^3 W_2(x)}{dx^3} + \frac{\kappa_4}{24} \frac{d^4 W_2(x)}{dx^4}, \quad (5)$$

де $W_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_2}} \exp\left(-\frac{(x-\kappa_1)^2}{2\kappa_2}\right)$ – нормальний розподіл Гауса.

Після підстановки відповідних похідних вираз (5) набуває вигляду

$$W_4(x) = \sum_{n=0}^4 a_n (x-\kappa_1)^n \times W_2(x), \quad (6)$$

де $a_0 = 1 + \frac{\kappa_4}{8\kappa_2^2}$; $a_1 = -\frac{\kappa_3}{2\kappa_2}$; $a_2 = -\frac{\kappa_4}{4\kappa_2^3}$; $a_3 = \frac{\kappa_3}{6\kappa_2^3}$; $a_4 = \frac{\kappa_4}{24\kappa_2^4}$.

З урахуванням рівняння (6) отримаємо вирази для середнього значення синуса і косинуса фазової похибки в ексцесному наближенні:

$$\begin{cases} \langle \sin(x) \rangle = [(1 + \kappa_4 / 24) \sin \kappa_1 - \kappa_3 \cos \kappa_1 / 6] \exp(-\kappa_2 / 2); \\ \langle \cos(x) \rangle = [(1 + \kappa_4 / 24) \cos \kappa_1 - \kappa_3 \sin \kappa_1 / 6] \exp(-\kappa_2 / 2). \end{cases} \quad (7)$$

Підстановкою в (2) рівнянь (4) та (7) отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь еволюції кумулянтів випадкового процесу $x(\tau)$ в ексцесному наближенні:

$$d\mathbf{X}/d\tau = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \gamma, N), \quad (8)$$

де $\mathbf{X} = \text{colon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ – вектор кумулянтів, \mathbf{F} – нелінійна векторна функція.

У частковому випадку $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$ система (8) перетворюється у відомі з [3] рівняння еволюції середнього значення і дисперсії у гаусовому наближенні:

$$d\kappa_1/d\tau = \gamma - \sin(\kappa_1) \exp(-\kappa_2/2); \quad d\kappa_2/d\tau = N - 2\kappa_2 \cos(\kappa_1) \exp(-\kappa_2/2). \quad (9)$$

Обчислювальна складність інтегрування рівнянь (8) приблизно в 8 разів більша, ніж інтегрування рівнянь (9), однак майже на два порядки менша, ніж у разі аналізу ансамблю реалізацій стохастичного рівняння (1) або відповідного рівняння Фокера–Планка. Розв'язування рівнянь (8) дає змогу простежити перехідні процеси у випадку зміни статистичних характеристик розподілу $W(x)$ та знайти стаціонарний розподіл $W_{st}(x)$.

На рис. 1 показано залежності від часу стандартного відхилення фазової похибки, яке є головним показником якості синхронізації, для двох наборів значень параметрів (γ, N) . Як порівняння на графіки нанесено стандартне відхилення стаціонарного розподілу Тихонова

$$W_{st}(x) = A \exp(-2(\gamma x + \cos x) / N), \quad (10)$$

де $A^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2(\gamma x + \cos(x)) / N) dx$ – нормувальний множник (прямі 3). Аналітичного виразу залежності розподілу $W(x, \tau)$ від часу не існує. За обраних значень параметрів похибка визначення стандартного відхилення спрощеними методами сягає 10% у гаусівському наближенні (криві 1) та 2,5% у ексцесному (криві 2). Гаусівське наближення в обох випадках дає занижену оцінку, а ексцесне – або занижену, або завищену.

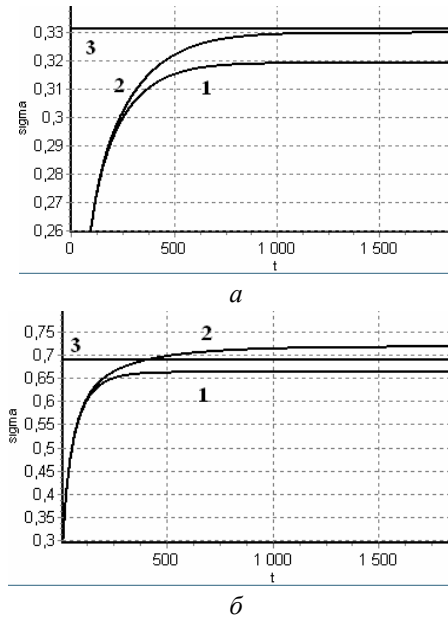
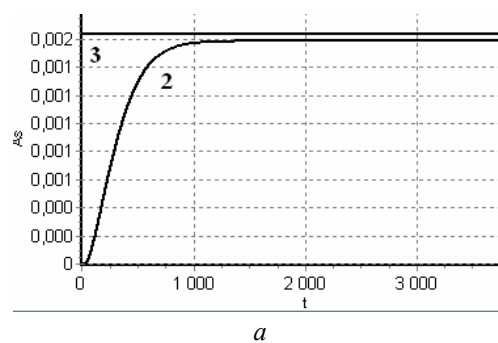


Рис. 1. Визначення стандартного відхилення фазової похибки: 1 – гаусове наближення; 2 – ексцесне наближення; 3 – точне стаціонарне значення;
 $a - \gamma=0,1; N=0,7$; $b - \gamma=0,6; N=0,15$.

На рис. 2 зображено аналогічні графіки визначення третього кумулянта κ_3 , який характеризує асиметрію розподілу. Похибка оцінки в ексцесному наближенні сягає 15%, можливі як завищені, так і занижені оцінки. Час визначення кумулянта κ_3 дещо більший від часу визначення кумулянта κ_2 , що є особливістю системи синхронізації з багатьма станами рівноваги. В системах з єдиним станом рівноваги, згідно з [1], найповільніше визначають дисперсію.



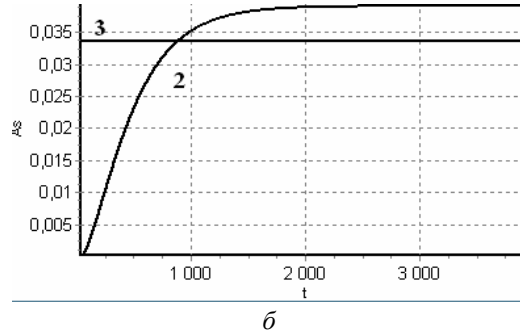


Рис. 2. Визначення асиметрії розподілу фазової похибки:
2 – ексцесне наближення; 3 – точне стаціонарне значення;
 $a - \gamma=0,7; N=0,05; b - \gamma=0,6; N=0,2$.

Значне зменшення обчислювальної складності дало змогу повністю перебрати параметри ФАПЧ з шумом в інтервалах $\gamma \in [0,1]$ з кроком 0,1, $N \in [0, 1,6]$ з кроком 0,02. При $\gamma > 1$ синхронізація неможлива, навіть якщо нема шуму, при $N > 1,5$ рівняння (8) і (9) стають нестійкими незалежно від значення γ . Результати обчислень стаціонарних значень стандартного відхилення фазової похибки показані на рис. 3 для декількох значень початкового розузгодження. Порівняння засвідчує, що ексцесне наближення дає точнішу оцінку стандартного відхилення, але система рівнянь (8) четвертого порядку втрачає стійкість за значно менших рівнів шуму, ніж система (9) другого порядку. Це спричинено завищеною оцінкою дисперсії в ексцесному наближенні. На рис. 4 зображено області простору параметрів, у яких існують стаціонарні розв'язки систем рівнянь (9) та (8) (криві 1 та 2 відповідно). Як доводять дослідження [4, 5], ці області можна використати для оцінки граничної завадостійкості пристроїв синхронізації. В разі використання точних методів, які дають розв'язки за довільних значень параметрів, така оцінка неможлива.

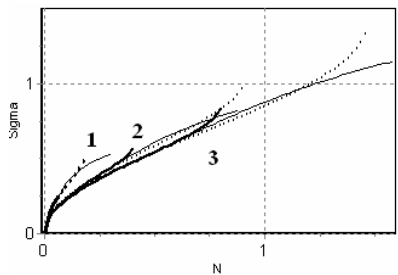


Рис. 3. Стаціонарні значення стандартного відхилення фазової похибки: суцільна лінія – точне значення; пунктир – гаусове наближення; жирна лінія – ексцесне наближення;
 $1 - \gamma=0,8; 2 - \gamma=0,4; 3 - \gamma=0$.

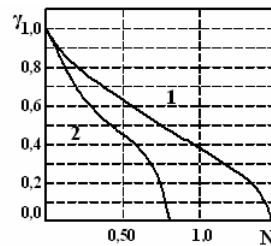


Рис. 4. Границі можливостей застосування наближених методів: 1 – гаусове наближення; 2 – ексцесне наближення.

Графіки відносної похибки оцінки якості синхронізації за всіх можливих комбінацій параметрів показані на рис. 5 і засвідчують, що врахування негаусовості розподілу фазової похибки за умов дотримання границь застосування дає змогу підвищити точність наближеного методу до десятих і сотих часток відсотка порівняно з одиницями та десятками відсотків у гаусовому наближенні.

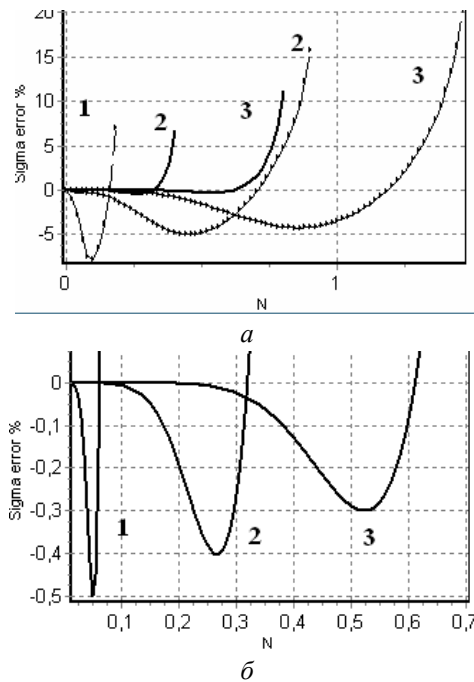


Рис. 5. Похибка оцінки стандартного відхилення фазової похибки для всієї області застосування (а) та в збільшеному масштабі (б): марковані лінії – гаусове наближення; жирні лінії – ексцесне наближення; 1 – $\gamma=0,8$; 2 – $\gamma=0,4$; 3 – $\gamma=0$.

Отже, врахування негаусовості розподілу фазової похибки в системі синхронізації дає змогу значно підвищити точність оцінки якості синхронізації. Перевагами описаного спрощеного методу перед точними є значне зменшення обчислювальних витрат, можливість аналізу перехідних процесів визначення статистичних характеристик розподілу фазової похибки, можливість одночасного врахування впливу шумів та внутрішньої або зовнішньої завади. Отримані границі стійкості систем кумулянтних рівнянь дають змогу оцінити граничну завадостійкість синхронізації. Розвиток цих переваг і становить перспективи подальшого використання описаного методу аналізу.

1. Бондарев А.П. О кумулянтном анализе системы ФАПЧ при воздействии гармонической помехи // Теор. електротехніка. 1985. Вып. 39. С. 79–84.
2. Бондарев А.П. Мандзій Б.А. Аналіз граничної завадостійкості системи фазової синхронізації // Теор. електротехніка. 1998. Вып. 54. С. 14–17.

3. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 372 с.
4. *Мандзий Б.А., Бондарев А.П.* Кумулянтный анализ статистической динамики СФС второго порядка // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Теория и проектирование полупроводниковых и радиоэлектронных устройств. 1985. № 196. С. 27–29.
5. *Шалфеев В.Д.* Использование кумулянтного анализа для исследования СФС. Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь, 1982.

**IMPACT OF PHASE ERROR NON-GAUSSIAN DISTRIBUTION ON THE
SYNCHRONIZATION QUALITY AND BOUNDARY NOISE STABILITY
OF PHASE LOCK**

A. Bondarev, O. Lazko, L. Nedostup

*Lviv Polytechnic National University
S. Bandera Str., 13, Lviv 790013, Ukraine
lazko_new@yahoo.com*

In the paper is shown that influence of phase error non-Gaussian distribution in the synchronization system gives an opportunity to increase precision of synchronization quality estimation. The durability bound of cumulant equations system enable to estimate the bound noise stability of synchronization. Development of those advantages becomes a future trends od described analysis method application.

Key words: non-gaussian distribution, phase error, cumulant.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005

Прийнята до друку 01.09.2005