

УДК 621.34 – 519.711

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ У МОДЕЛЮВАННІ СУЧАСНИХ ЕЛЕКТРОПРИВОДІВ

В. Мороз

*Національний університет “Львівська політехніка”
вул. Ст. Бандери, 12, Львів 79013, Україна
vmoroz@polynet.lviv.ua , vmoroz58@yahoo.com*

Проаналізовано особливості використання числових методів розв’язування звичайних диференціальних рівнянь у моделюванні сучасних електроприводів з імпульсними елементами. Приклад моделі електроприводу реалізований у популярному середовищі імітаційного моделювання MATLAB + Simulink. Визначено проблеми, що виникають у відтворенні головних координат, у разі використання числових методів. Запропоновано підходи до їхнього раціонального застосування.

Ключові слова: числові методи, звичайні диференціальні рівняння, електропривод, комп’ютерне моделювання.

Розвиток силової електроніки, підвищення вимог до сучасних електроприводів, широке використання приводів змінного струму зумовили суттєві зміни у побудові силових кіл автоматизованих електроприводів: поширення набули напівпровідникові пристрої за принципом широтно-імпульсної модуляції (ШІМ). Імпульсність або дискретність роботи мають не тільки силові кола сучасних напівпровідникових перетворювачів частоти (наприклад, з використанням IGBT-транзисторів), а й системи керування з релейними регуляторами чи мікроконтролерами.

Сучасні методи проектування передбачають комп’ютерний аналіз ухвалених рішень. У випадку розробки автоматизованих електроприводів значну частину аналізу становить дослідження їхніх динамічних характеристик. Для цього створюють математичну модель досліджуваної системи – систему звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР), яку розв’язують відповідними числовими методами. На цьому етапі процес розрахунку ускладнений особливостями досліджуваних імпульсних систем – наявністю розривів у функції розв’язку. Така особливість не дає змоги беззастережно використовувати для розрахунку традиційні алгоритми, оскільки не виконується головна умова: *числові методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь апроксимують розв’язок розкладом в обмежений ряд Тейлора, кількість членів якого визначена порядком числового методу.*

Потрібно розуміти, що розкласти в ряд Тейлора можна лише **неперервну диференційовану** функцію, а практично кожна задача з автоматизованого

електроприводу, що містить або релейний регулятор, або перетворювач на базі комутованих напівпровідникових вентилів (наприклад, силова схема за принципом ШІМ), має явно виражені розриви як самої функції, так і її похідних. Це означає, що для таких задач не можна використовувати стандартні підходи без урахування особливостей поведінки функції розв'язку, тому актуальними є методики правильного застосування числових методів розв'язування СЗДР у таких випадках.

Ускладнює завдання аналізу сучасних систем автоматизованого електроприводу щонайменше 30-річна давність математичних основ, що закладені в сучасні засоби комп'ютерного моделювання, та відомі (стандартні) програми розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Одним зі способів вирішення цієї проблеми може бути вилучення зі всього інтервалу інтегрування СЗДР точок комутації напівпровідникових ключів шляхом їхнього розгляду як початкових і кінцевих точок окремих інтервалів інтегрування. Такий підхід з розбиттям на окремі інтервали інтегрування є відомим у розрахунках напівпровідникових силових схем [6]. Також практично вирішити цю проблему можна методом інвертування СЗДР, що запропонований проф. Р. Фільцом [3]. Цей метод забезпечує просту реалізацію алгоритму знаходження точок комутації та дає змогу частково вирішити проблему жорсткості такої системи, завдяки чому можна застосувати звичайні числові методи, а не методи для жорстких систем, які мають гіршу точність, як доведено в [1, 2].

Про особливості поведінки числових методів для жорстких СЗДР згадано також у статті одного з авторів реалізацій числових методів для середовища MATLAB Л. Шемпайна (*Lawrence Shampine*) [7], де наведено приклад жорсткої системи диференціальних рівнянь лише другого (!) порядку з різними розв'язками для різних реалізацій відповідних числових методів з автоматичним вибором кроку інтегрування, хоча застосування стратегії автоматичного вибору кроку мало б забезпечувати від таких несподіванок.

Ми мали на меті отримати інформацію про особливості застосування числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь у моделюванні сучасних електроприводів з імпульсними елементами.

Для дослідження динаміки автоматизованих електроприводів широко застосовують процедури розв'язування СЗДР зі стратегією автоматичного вибору кроку інтегрування [4–5, 7]. Ця стратегія забезпечує пристосування числового методу до поведінки функції розв'язку та оптимальне поєднання тривалість/точність розв'язку. У випадку моделювання імпульсних систем за допомогою цієї стратегії вдається з деякою похибкою визначити точки комутації (розриви функції розв'язку) – у цих точках крок розв'язування різко скорочується для зменшення локальної похибки числового методу, після чого продовжується процес обчислення. Тут потрібно враховувати, що кожен крок комутації знаходять **наближено** (лише з такою точністю, щоб локальна похибка числового методу не виходила за межі заданої), а якщо таких точок багато, то похибки від неточного визначення точок комутації мають тенденцію до накопичення. У цьому разі не усувається головне джерело похибок – усі класичні числові методи розв'язування диференціальних рівнянь не призначені для розривних функцій.

Цю проблему можна вирішити двома шляхами (чи їхнім поєднанням):

- 1) збільшенням заданої точності розв'язування – у такому разі точніше визначають точки комутації (точки розриву);
- 2) зменшенням максимального значення кроку розв'язування – спонукає числовий метод точніше відстежувати зміну поведінки функції розв'язку незалежно від дії алгоритму вибору кроку.

Обидва шляхи найпростіше перевірити в одному з найпопулярніших пакетів імітаційного комп'ютерного моделювання останніми роками – середовищі Simulink пакета MATLAB (MathWorks, Inc.). Зручність користування середовищем, простота і природність процесу створення імітаційної моделі, досконала реалізація найсучасніших числових методів, у тому числі й для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, зумовили його поширення і фактичне визнання як стандарту для імітаційного моделювання різноманітних динамічних систем. Додаткову перевагу середовищу MATLAB надає його відкритість – можливість доповнення новими розробленими алгоритмами у випадку незадовільної роботи стандартних.

Поведінку числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь досліджено на демонстраційній моделі з цього пакета – імітації режимів пуску і навантаження системи електроприводу постійного струму з імпульсним регулюванням (використано простий широтно-імпульсний модулятор (ШІМ)), яка міститься у файлі **psbdcdrive.mdl** MATLAB версії 6.5 (рис. 1). Така система, **по-перше**, досить проста для розуміння та аналізу процесів, що в ній відбуваються, і, **по-друге**, дає змогу уникнути звинувачень у необ'єктивності, бо пропонується як приклад власне розробниками пакета.

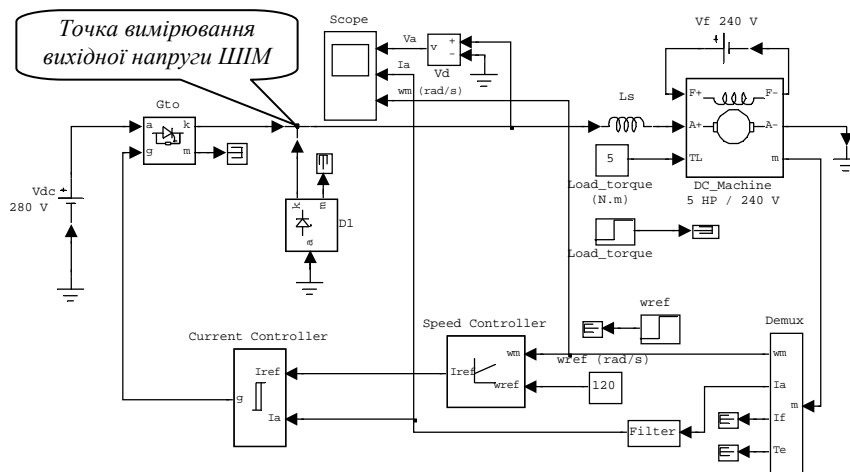


Рис. 1. Демонстраційна модель імпульсного електроприводу постійного струму в пакеті SimPowerSystems середовища MATLAB.

За контрольований параметр під час аналізу поведінки числових методів вибрано проміжну координату – вихідну напругу ШІМ, прямокутна форма якої

відома з практичних досліджень. Переконались у прямокутності форми можна на пропонованій демонстраційній моделі, використовуючи добре відомий і перевірений метод **ode23**, що реалізує однокрокову формулу Богацкі–Шемпайна зі стратегією автоматичного вибору кроку інтегрування та призначений для розв’язування нежорстких і слабкожорстких систем. Отримані результати (рис. 2) свідчать, що пропонована модель достатньо точно описує процеси на виході ШІМ. Єдиним недоліком застосування методу **ode23** та інших методів для нежорстких СЗДР є доволі великий час розрахунку (до десятків хвилин), оскільки досліджувана система жорстка через наявність моделей силових напівпровідникових ключів, а метод **ode23** для жорстких задач не пристосований, хоча дає змогу отримати досить-таки правдиві результати.

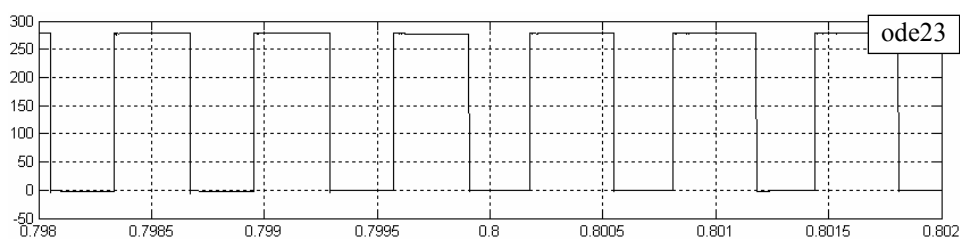


Рис. 2. Форма вихідної напруги ШІМ у демонстраційній моделі для методу **ode23**.

Наступний етап досліджень – використання для розрахунку рекомендованих у Simulink спеціальних числових методів для розв’язування жорстких систем диференціальних рівнянь:

ode15s – універсальна функція, що реалізує два методи розв’язування жорстких систем диференціальних рівнянь з автоматичним вибором кроку інтегрування:

- 1) на підставі формул диференціювання назад (ФДН) першого–п’ятого порядку;
- 2) на підставі сім’ї формул числового диференціювання, запропонованих Клопфенштайном (*Klopfenstein*) і Райхером (*Reiher*) першого–п’ятого порядку, дещо ефективніших від ФДН; цей метод використовується за замовчуванням;

ode23s – функція реалізує модифікований метод Розенброка (*Rosenbrock*) другого порядку для жорстких систем диференціальних рівнянь. Рекомендована для невисокої точності. Можна застосовувати для низки жорстких задач, для яких функція **ode15s** не є ефективною;

ode23t – функція ґрунтується на методі трапецій і призначена для систем з середньою жорсткістю та ефективна для невисокої точності розв’язку;

ode23tb – функція реалізує метод TR-BDF2, що подібний до методу Рунге–Кутта, у якому на першому кроці застосовують формулу трапецій, а на другому – формулу диференціювання назад другого порядку; ефективна для невисокої точності.

Перелічені методи (зокрема, **ode15s** і **ode23tb**) запропоновані авторами пакета як базові до використання в моделях, що створені на базі бібліотеки

SimPowerSystems і завдяки властивостям забезпечують для жорстких систем диференціальних рівнянь значно вищу швидкість моделювання порівняно зі звичайними методами. Зазначимо, що реалізовані у MATLAB процедури ґрунтуються на перевірених роками математичних формулах і написані відомими в галузі числових методів фахівцями (достатньо згадати лише К. Моулера і Л. Шемпайна).

На рис. 3 показано результати моделювання вихідної напруги ШІМ у цій системі для перерахованих числових методів (назву зазначено вгорі на графіку) з вибором параметрів точності та максимального кроку за замовчуванням (режим **auto**) – саме такі значення запропонували розробники в демонстраційній моделі та застосовує більшість користувачів Simulink.

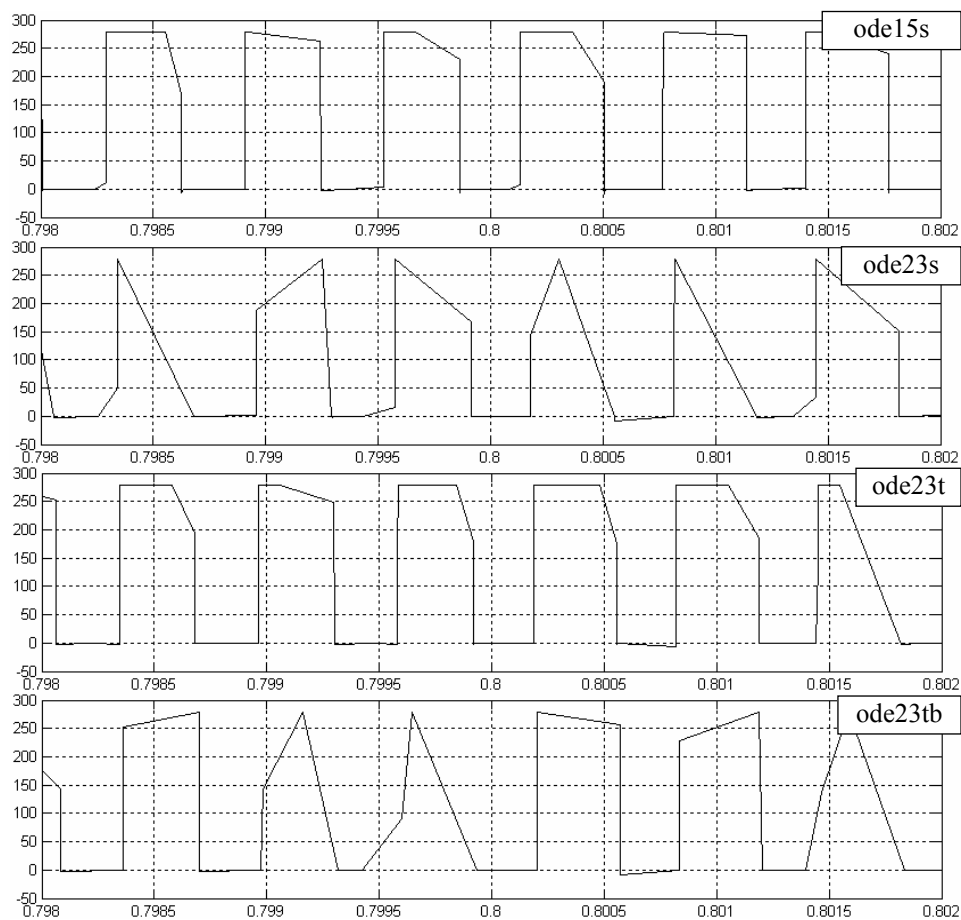


Рис. 3. Форма напруги на виході ШІМ у демонстраційній моделі SimPowerSystems для різних числових методів.

Для об'єктивності потрібно згадати про значний приріст швидкості розрахунку (принаймні, на один–два порядки) порівняно з традиційними числовими методами, що цілком зрозуміло для задач такого типу. Проте

швидкість розрахунку згубно вплинула на достовірність результатів: важко повірити в те, що реальний ШІМ має на виході таку форму напруги, яку дає нам комп'ютерне моделювання в Simulink. Крім того, графіки на рис. 3 наочно показують відмінність форм змодельованої напруги ШІМ для кожного зі згаданих числових методів, хоча всі вони реалізують стратегію з автоматичним вибором кроку інтегрування, що, як зазначено, мало б не допустити такого явища.

У складніших задачах (наприклад, моделювання електроприводів змінного струму з напівпровідниковими перетворювачами; приклад такої задачі в середовищі Simulink міститься у файлі **psbacdrive.mdl**) похибки від застосування розглянутих числових методів ще вищі. Числові експерименти засвідчили, що заміна одного методу розв'язування іншим (з тими самими умовами точності) може призвести до відчутної зміни поведінки моделі.

Точність моделювання, як уже зазначено, можна поліпшити збільшенням точності розв'язування. Форма вихідної напруги ШІМ для методу **ode23tb** із заданою точністю 10^{-6} зображена на рис. 4, де видно, що підвищення точності розв'язування не змогло повністю усунути похибки моделювання – розриви у точках комутації не відстежені з достатньою точністю.

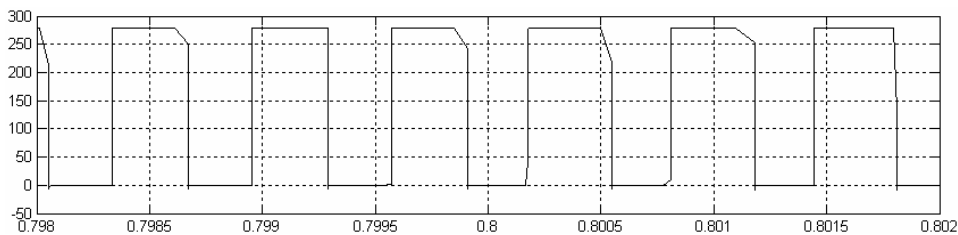


Рис. 4. Форма напруги на виході ШІМ у демонстраційній моделі SimPowerSystems для числового методу **ode23tb** і точності 10^{-6} .

Отримати методом **ode23tb** достовірніші результати для вихідної напруги ШІМ вдалося після обмеження максимального кроку інтегрування величиною 10^{-6} . Форма напруги ШІМ для такого випадку і точності 10^{-6} показана на рис. 5.

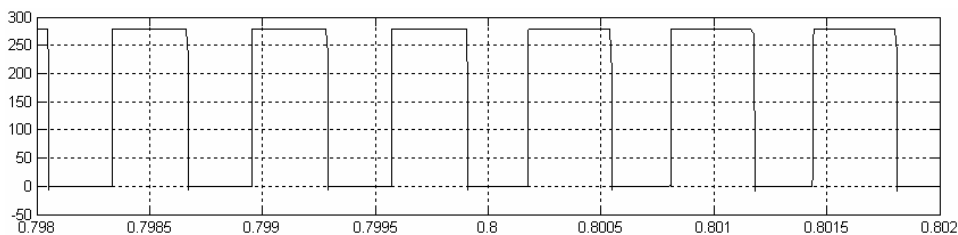


Рис. 5. Форма напруги на виході ШІМ у демонстраційній моделі для числового методу **ode23tb** з обмеженням максимального кроку 10^{-6} і точності 10^{-6} .

Зрозуміло, що переважна більшість користувачів не звертає уваги на такі тонкощі у виборі точності розв'язування та максимального кроку інтегрування, справедливо вважаючи, що середовище моделювання повинно автоматично забезпечувати раціональні параметри числових методів, оскільки типовий

користувач не є фахівцем у галузі числових методів і не завжди має час та нагоду з'ясувати це питання.

Отже, у разі використання числових методів розв'язування СЗДР для моделювання систем автоматизованого електроприводу з імпульсними елементами потрібно враховувати такі особливості:

- числові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, у тому числі з автоматичним вибором кроку інтегрування, призначені для порівняно гладких функцій розв'язку і не пристосовані до розривних функцій, які трапляються в моделюванні електромеханічних систем з імпульсними елементами;
- числові методи для нежорстких систем дають достовірніші результати порівняно з методами для жорстких систем, проте в цьому разі може відчутно зрости час розрахунку;
- у випадку використання числових методів для жорстких систем з метою зменшити похибку розв'язку з розривами функції потрібно задавати велику локальну точність у числових методах (10^{-5} – 10^{-6} і вище) та ввести обмеження на максимальний крок; ці параметри індивідуальні для кожної конкретної задачі та визначені її фізичною суттю;
- у жодному разі не можна довіряти середовищу моделювання та відомим процедурам реалізації числових методів, потрібно глибоко розуміти фізичні процеси в досліджуваній системі для того, щоб у разі потреби ввести корекцію в режими роботи числових методів.

-
1. *Мороз В.* Аналіз числових методів для моделювання керованих електромеханічних систем // Вісн. ДУ “Львів. політехніка”. Електроенергетичні та електромеханічні системи. 2000. № 403. С. 111–113.
 2. *Мороз В.* Погляд інженера-електрика на числові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. НУ “Львів. політехніка”. Електроенергетичні та електромеханічні системи. 2003. № 485. С. 208–213.
 3. *Фильц Р.В.* Математические основы теории электромеханических преобразователей. К.: Наук. думка, 1979.
 4. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
 5. *Чуа Л.О., Лин Пен-Мин.* Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные процедуры / Пер. с англ. М.: Энергия, 1980. 640 с.
 6. *Ягун В.Г.* Автоматизированный расчет тиристорных схем. Харьков: Вища школа, 1986.
 7. *Shampine L., Reichelt M.* The MATLAB ODE Suite: http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/otherdocs/ode_suite.pdf.

THE FEATURES OF THE NUMERICAL METHODS APPLICATION IN THE SIMULATION OF THE MODERN ELECTRICAL DRIVES

V. Moroz

*National Lviv's Polytechnic University
St. Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine
vmoroz@polynet.lviv.ua , vmoroz58@yahoo.com*

The analysis of features of the using of the numerical methods for ordinary differential equations in the simulation of the modern electric drives with impulse elements is conducted in the article. The example of the electrical drive model was realized in the popular environment of the imitation design MATLAB + Simulink. Problems of the recreation of basic co-ordinates using the numerical methods are shown. The approaches to their rational using are offered.

Key words: numerical methods, ordinary differential equations, electrical drive, computer simulation.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005

Прийнята до друку 01.09.2005