

---

## МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ

УДК 51.001.57., 621.313.33

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГЛИБОКОПАЗНОГО АСИНХРОННОГО МОТОРА У ФАЗНИХ КООРДИНАТАХ

А. Чабан

*Національний університет "Львівська політехніка"  
вул. С. Бандери, 12, Львів 79013, Україна  
vchaban@polynet.lviv.ua*

Розглянуто математичну модель насиченого глибокопазного асинхронного мотора у фазних координатах. Диференціальні рівняння електромеханічного стану машини та дискретизовані рівняння електромагнітного поля пазів ротора наведено в нормальній формі Коші. Результати комп'ютерної симуляції відображено графічно.

*Ключові слова:* коло-польова модель, глибокопазний мотор, фазні координати.

Одна з головних проблем сучасної електроенергетики – стабілізація напруги у вузлі навантаження енергосистеми. Асинхронна машина є чи не найголовнішим елементом вузла. Тобто вузол навантаження містить подекуди декілька десятків моторів. Тому постає питання про процеси, що виникають у самому вузлі під час роботи такої кількості машин, яке неможливо вирішити без математичної моделі самого мотора. Велика кількість моторів працює з активним моментом на валу ротора. Тому математична модель машини повинна враховувати фізичні процеси, пов'язані з явищем витіснення струму в стрижнях короткозамкненого ротора мотора, особливо це стосується глибокопазних моторів.

Зрозуміло, що застарілі інженерні методи, побудовані на коловій схемі заміщення машини, сьогодні не дають точної фізичної картини, що відбувається в самому вузлі та й у кожному з його елементів, особливо тоді, коли питання стосується моторів з підвищеним моментом пуску, тобто глибокопазних моторів та моторів з подвійною білячою кліткою. Важливо зазначити, що коли машини працюють з великими динамічними навантаженнями, то в роторі мотора та валах електроприводів виникають суттєві механічні крутильні коливання, які значно впливають на струми та напругу вузла навантаження, а також на самі електричні машини безпосередньо. Такі складні процеси можна описати лише поєднанням рівнянь електромагнітного стану статора і ротора машини (причому стрижні ротора білячої клітки описувані рівняннями електромагнітного поля) та поєднанням рівнянь механічного стану машини з нежорстким ротором. Таку задачу можна розв'язати тоді і тільки тоді, коли рівняння електромагнітного стану машини наведені у фазних координатах, тобто в рівняння глибокопазного мотора

явно входить кут повороту уявної магнітної осі фази  $A$  ротора відносно магнітної осі фази  $A$  статора  $-\gamma$ . Ми наведемо спрощений варіант моделі, коли ротор вважають абсолютно жорстким тілом.

Запишемо рівняння статора і ротора машини для повних потокозчеплень:

$$\frac{d\Psi_S}{dt} = u_S - R_S i_S, \quad \frac{d\Psi_R}{dt} = u_R - R_{RL} i_R; \quad (1)$$

$$\Psi_S = \alpha_S^{-1} i_S + \psi_S, \quad \Psi_R = \alpha_{RL}^{-1} i_R + \psi_R, \quad (2)$$

де  $\Psi_S, \Psi_R$  – вектори-стовпці повних потокозчеплень статора й ротора, відповідно;  $R_S, R_{RL}$  – матриця опорів обмоток статора й опорів лобових частин фаз ротора, відповідно;  $i_S, i_R$  – вектори-стовпці струмів фаз статора й ротора, відповідно;  $u_S$  – вектор-стовпець фазних напруг статора;  $u_R$  – вектор-стовпець напруг ротора в стрижнях білячої клітки обмотки ротора;  $\psi_S, \psi_R$  – вектори-стовпці робочих потокозчеплень статора й ротора, відповідно;  $\alpha_S, \alpha_{RL}$  – матриця релактивностей розсіювання обмоток статора й лобових частин обмоток фаз ротора, відповідно.

Запишемо вираз для обчислення модуля просторового вектора струму намагнічування мотора:

$$i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_{A'B} + i_B^2)/3}, \quad i_m = \tau \psi_m, \quad \tau = \left(\frac{\psi_m(i_m)}{i_m}\right)^{-1}, \quad \rho = \left(\frac{\partial \psi_m(i_m)}{\partial i_m}\right)^{-1} = \tau^\rho; \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} i_A & i_B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} i_{SA} & i_{SB} \end{bmatrix}^T + \Pi \begin{bmatrix} i_{RA} & i_{RB} \end{bmatrix}^T, \quad (4)$$

де  $S$  і  $R$  – індекси належності до статора й ротора, відповідно;  $A$  і  $B$  – індекси фаз живлення мотора;  $\psi_m(i_m)$  – основне (робоче) потокозчеплення машини;  $\tau, \rho$  – статична та диференціальна релактивності намагнічування машини;

$$\psi_S = \psi = \Pi \psi_R, \quad \psi_R = \Pi^{-1} \psi_S, \quad \psi = \tau(i_S + \Pi i_R); \quad (5)$$

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\gamma + 2\pi/3) & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & -\sin(\gamma - 2\pi/3) \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$\Pi^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin(\gamma - 2\pi/3) & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \sin(\gamma + 2\pi/3) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де  $\psi$  – вектор-стовпець робочих потокозчеплень машини.

Запишемо математичну А-модель асинхронної машини без урахування скін-ефекту у фазних координатах [2]:

$$\frac{di_S}{dt} = A_S(u_S - R_S i_S) + A_{SR} \Pi(-\Omega \Psi_R - R_R i_R); \quad (8)$$

$$\frac{di_R}{dt} = \Pi^{-1} A_{RS}(u_S - R_S i_S) + \Pi^{-1} A_R \Pi(-\Omega \Psi_R - R_R i_R) + \Omega i_R, \quad (9)$$

де  $R_S, R_R$  – опір обмотки фази статора й ротора;

$$\Omega = \Pi \frac{d\Pi^{-1}}{dt} = -\Pi^{-1} \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Запишемо А-модель асинхронної машини з урахуванням скін-ефекту у фазних координатах[2]:

$$\frac{di_S}{dt} = A_S(u_S - R_S i_S) + A_{SR} \Pi(-u_R - \Omega \Psi_R - R_{RL} i_R); \quad (11)$$

$$\frac{di_R}{dt} = \Pi^{-1} A_{RS}(u_S - R_S i_S) + \Pi^{-1} A_R \Pi(-u_R - \Omega \Psi_R - R_{RL} i_R) + \Omega i_R; \quad (12)$$

$$A_S = \alpha_S(1 - \alpha_S G), \quad A_{SR} = A_{RS} = \alpha_S \alpha_{RL} G, \quad A_R = \alpha_{RL}(1 - \alpha_{RL} G); \quad (13)$$

$$i = i_S + \Pi i_R, \quad R = 1/(\alpha_S + \alpha_{RL} + \rho), \quad T = 1/(\alpha_S + \alpha_{RL} + \tau); \quad (14)$$

$$b = \frac{2}{3} \frac{R - T}{i_m^2}, \quad b_A = b(2i_A + i_B), \quad b_B = b(2i_B + i_A); \quad (15)$$

$$G = \begin{bmatrix} T + b_A i_A & b_B i_A \\ b_A i_B & T + b_B i_B \end{bmatrix}. \quad (16)$$

На підставі аналізу системи (8)–(13) можна зробити висновок, що в рівняннях (11), (12) є невідома функція  $u_R$ . Отже, розв'язок системи неможливий. Фізично  $u_R$  характеризує напругу на стрижнях білячої клітки ротора. Зрозуміло, що головні процеси витіснення струму відбуваються саме в цих стрижнях. Тому задача зводиться до знаходження  $u_R$ .

Напругу на стрижнях ротора обчислюємо з рівнянь Максвелла. Запишемо їх:

$$\text{rot} \vec{H} \equiv \nabla \times \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{v} \frac{d\vec{H}}{dt}. \quad (17)$$

Для спрощення задачі розглянемо прямокутний паз. Тоді, зорієнтувавши відповідно декартові координати, задачу можемо звести до одновимірної. Просторову координату  $z$  спрямуємо по глибині паза, координату  $x$  – по напрямку протікання струму в стрижнях ротора, а координата  $y$  буде перпендикулярна до стінок паза в напрямі, який утворює правосторонню декартову систему координат. Тоді з урахуванням зазначеного вище, отримаємо рівняння в векторній формі:

$$\vec{H} = \vec{y}_0 H, \quad \vec{E} = \vec{x}_0 E. \quad (18)$$

Розкриємо систему векторних рівнянь (17) та запишемо їх за умови (18) у скалярній формі:

$$E = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H}{\partial z}; \quad v = 1/\mu; \quad (19)$$

$$\frac{\partial H_A}{\partial t} = \frac{v}{\gamma} \frac{\partial^2 H_A}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial H_B}{\partial t} = \frac{v}{\gamma} \frac{\partial^2 H_B}{\partial z^2}, \quad (20)$$

де  $\mu, \gamma$  – магнітна проникність та питома електрична провідність алюмінію.

Крайові умови знаходимо за законом повного струму. Контур інтегрування проходить по поверхні паза, сусідньому зубці ротора, далі по дну паза та через зубець з протилежної сторони паза повертається на поверхню самого паза:

$$H_A(0) = i_{RA} / a; \quad H_B(0) = i_{RB} / a; \quad H_A(h) = H_B(h) = 0, \quad (21)$$

де  $a$  – ширина паза ротора по координаті  $y$ ;  $h$  – глибина паза по координаті  $z$ .

Дискретизуємо по просторовій координаті  $z$  за методом скінчених різниць, отримаємо

$$\frac{dH_{Ai}}{dt} = \frac{v}{\gamma(\Delta z)^2} (H_{Ai-1} - 2H_{Ai} + H_{Ai+1}); \quad (22)$$

$$\frac{dH_{Bi}}{dt} = \frac{v}{\gamma(\Delta z)^2} (H_{Bi-1} - 2H_{Bi} + H_{Bi+1}), \quad (23)$$

де  $\Delta z$  – кількість вузлів просторової дискретизації;  $i = 2, \dots, m-1$ ;  $\Delta z = h/(m-1)$ .

Для достатньо точного розрахунку  $m \geq 10$ . Тоді на підставі теореми про поверхню паза провідника запишемо [1]

$$u_R = E(0)l, \quad (24)$$

де  $l$  – довжина паза по координаті  $x$ .

На підставі аналізу зазначеного вище та розв’язування сумісно (19) і (24) запишемо дискретне рівняння для знаходження спаду напруги на стрижнях ротора [1]:

$$u_{RA} = \frac{k_u k_i}{2\gamma} l (-3H_{A1} + 4H_{A2} - H_{A3}); \quad (25)$$

$$u_{RB} = \frac{k_u k_i}{2\gamma} l (-3H_{B1} + 4H_{B2} - H_{B3}), \quad (26)$$

де  $k_u, k_i$  – коефіцієнти трансформації машини за напругою та струмом, відповідно.

Доповнимо систему рівнянь електромагнітного стану рівняннями руху електроприводу, записаними на підставі рівнянь Лагранжа другого роду, причому ротор машини вважаємо абсолютно жорстким тілом:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J} (M_E - M(\omega)); \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega(t); \quad (27)$$

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (i_{RA}^{\Pi} i_{SB}^{\Pi} - i_{RB}^{\Pi} i_{SA}^{\Pi}) / \tau, \quad (28)$$

де  $\begin{bmatrix} i_{RA}^{\Pi} \\ i_{RB}^{\Pi} \end{bmatrix} = \Pi \begin{bmatrix} i_{RA} \\ i_{RB} \end{bmatrix}, \quad (29)$

$M(\omega)$  – момент навантаження асинхронної машини.

Тепер сумісному розв’язку підлягає система диференціальних рівнянь (3)–(31), причому вона записана в нормальній формі Коші. На кожному часовому кроці знаходимо напругу ротора (25), (26) та підставляємо в систему (11), (12). Інтегрування виконуємо методом Рунге–Кутта.

Для дослідження запропоновано реальний електропривід, який працює на заводі “Азовсталь” в Маріуполі. Тип двигуна А 12-52-8А ( $P_H = 320$  кВт,  $U_H = 6$  кВ,  $I_H = 39$  А,  $\omega_H = 740$  об/хв); параметри машини такі:  $R_S = 1,27$  Ом,  $R_{RL} = 0,21$  Ом,  $\alpha_S = 38,9$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 35,7$  Гн<sup>-1</sup>,  $p_0 = 4$ ,  $J = 64,5$  кг×м<sup>2</sup>,  $h = 0,038$  м,  $l = 0,23$  м,  $a = 0,005$  м – розміри паза мотора,

$$M(\omega) = 2,257\omega + 0,000074\omega + 0,000000000011\omega. \quad (30)$$

Крива намагнічування машини виглядає так:

$$\psi_m = \begin{cases} 0,8182i_m, & \text{if } i_m \leq 11; \\ 9 + 0,508(i_m - 11) + 0,0064(i_m - 11)^2 + 0,000147(i_m - 11)^3, & \text{if } 11 < i_m < 40; \\ 0,2375 + 23,19i_m, & \text{if } 40 \leq i_m. \end{cases} \quad (31)$$

Розрахунок реверсу та наступного розгону електроприводу на прикладі математичної моделі виконано двома способами: перший спосіб без урахування витіснення струму, а другий – з урахуванням. У разі аналізу моделі з витісненням струму графічні залежності майже повністю відтворювали картину, отриману експериментальним шляхом на заводі в Маріуполі. Натомість, у моделі без урахування скін-ефекту графічні залежності не відображали реальної картини. Для наочного підтвердження цього до графічних матеріалів додано осцилограму реверса та наступного пуску досліджуваного електроприводу, отриману експериментальним шляхом на заводі “Азовсталь”.

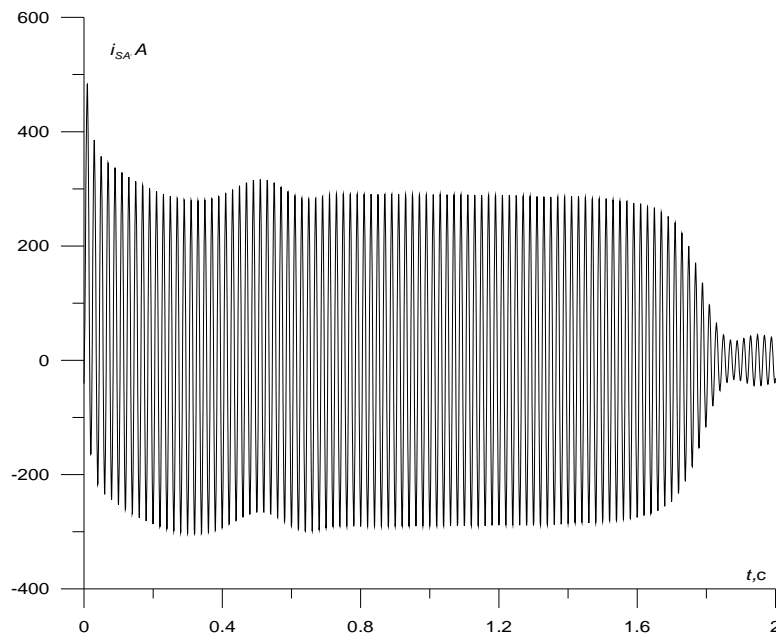


Рис. 1. Струм фази А статора в перехідному процесі (без урахування витіснення струму).

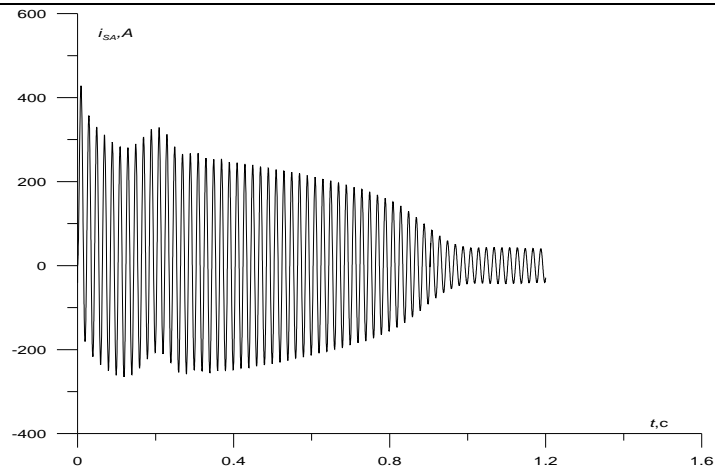


Рис. 2. Струм фази  $A$  статора в перехідному процесі (з урахуванням витіснення струму).

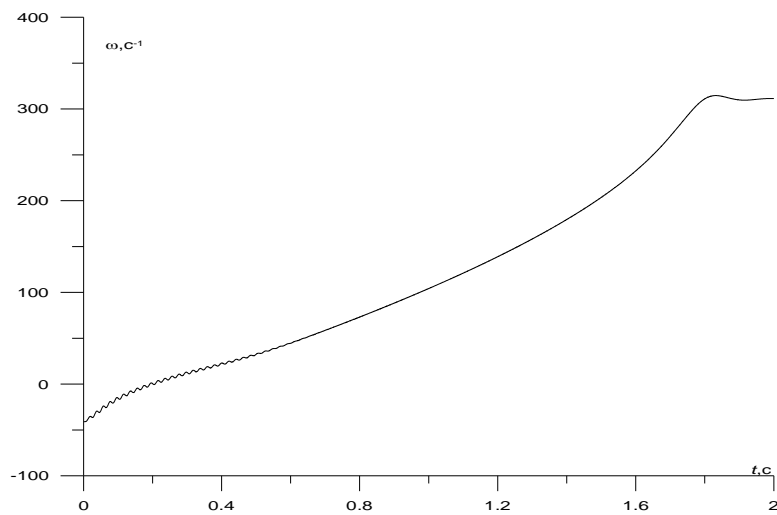


Рис. 3. Залежність від часу кутової швидкості під час реверсу та наступного розгону машини (без урахування витіснення струму).

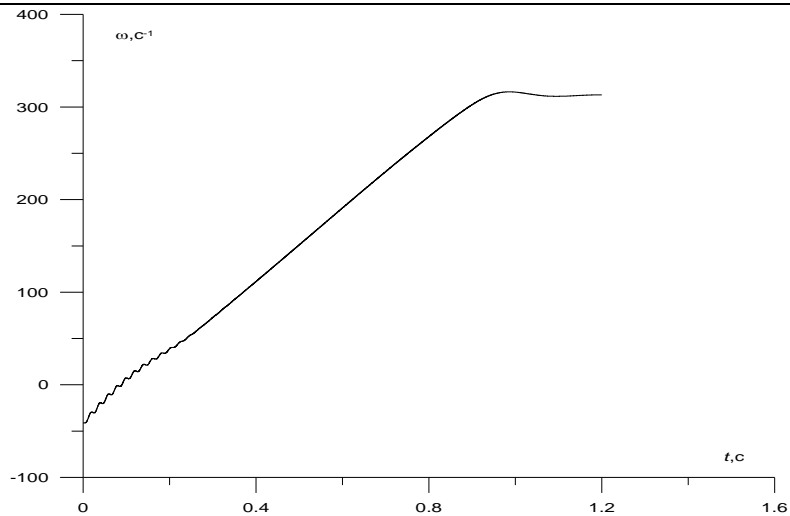


Рис. 4. Залежність від часу кутової швидкості під час реверсу та наступного розгону машини (з урахуванням витіснення струму).

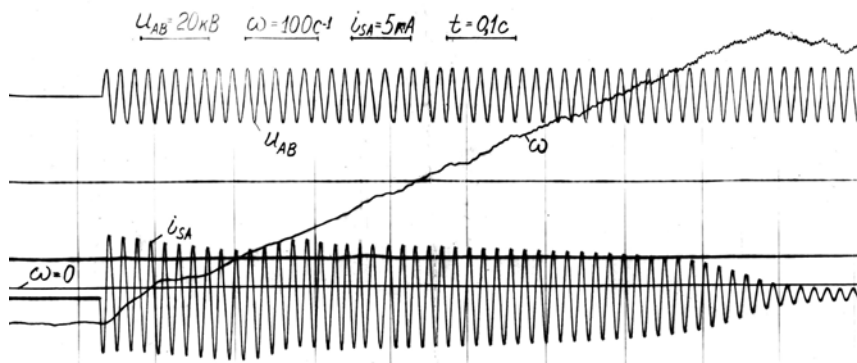


Рис. 5. Осцилограма реверсу та наступного розгону мотора А 12–52–8А.

Як видно з рис. 1–5, осцилограма реверсу та наступного розгону асинхронного мотора А 12–52–8А (див. рис. 5) майже повністю збігається з кривими рис. 2 та 4. Зрозуміло, що графіки перехідного процесу (особливо кутова швидкість машини) містять незначні відхилення від осцилограми, але час реверсу й наступного розгону (який показано в масштабі рис. 5) повністю відповідає розрахованому часу; значення струму фази А, розрахованого в моделі, також збігається з осцилограмою. Зазначимо, що на графіках рис. 3 і 4 відображена не механічна кутова швидкість обертання мотора, а електрична ( $\omega_{\text{мех}} = \omega_{\text{елек}} / p_0$ ); струми мотора на рис. 1 і 2 є реальними фізичними величинами.

Отже, модель асинхронної машини у фазних координатах дає змогу оперувати кутом повороту магнітної осі фази А індуктора відносно магнітної осі

фази  $A$  якоря. Перехідний процес у математичній моделі з урахуванням витіснення струму згасає набагато швидше. Тому цілком зрозуміло, що для аналізу роботи електроприводу з підвищеним пусковим моментом, який входить у вузол навантаження енергосистеми, необхідно використовувати  $A$ -модель з урахуванням витіснення струму в стрижнях ротора, причому у фазних координатах, що дає змогу враховувати крутильні механічні коливання електроприводу. Розрахунки таких типів моделей уже виконують.

1. Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів. Львів, 1997. 344 с.
2. Чабан А. Симуляція комутаційних перенапруг глибокопазного асинхронного мотора, що живиться через кабель // Електротехніка і електромеханіка. 2004. №3. С. 61–64.

### MATHEMATICAL MODEL OF DEEP SLOT INDUCTION MOTOR IN PHASE COORDINATES

**A. Tchaban**

*Lviv Polytechnic National University  
Bandery Str., 12, Lviv 79013, Ukraine*

In the paper is proposed the mathematical model of saturated deep slot induction motor in phase coordinates. The differential equations of electromechanical state and spatial quantization equations of electromagnetic field of rotor deep slots are wrote down in normal Cauchy form. The results of computation are given.

*Key words:* circuit-field model, deep slot induction motor, phase coordinatrs.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005

Прийнята до друку 01.09.2005