

УДК 621.314.2

НАПІВПОЛЬОВА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПРИСТРОЇВ

В. Мадай, О. Шегедин, М. Соколовський

*Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна*

Розглянуто особливості моделювання електромагнітних пристроїв та дослідження режимів їхньої роботи. Розроблено напівпольову математичну модель для розрахунку перехідних та усталених процесів на основі поєднання методів теорії електромагнітних кіл і методів теорії електромагнітного поля, що дає змогу визначати просторово-часовий розподіл векторів напруженості магнітного поля і магнітної індукції.

Ключові слова: математичне моделювання, електромагнітний пристрій, електромагнітне поле.

Сьогодні у процесі побудови й аналізу режимів електромагнітних пристроїв (ЕМП) набувають поширення методи математичного моделювання, що дають змогу з достатнім ступенем вірогідності прогнозувати їхні експлуатаційні (портативність, енергоощадність) параметри. До ЕМП належать пристрої, які складаються з n заструмлених обмоток і магнітопроводу з повітряним проміжком. Різноманіття ЕМП потребує побудови в кожному конкретному випадку специфічних математичних моделей, які повинні відповідати таким вимогам:

- адекватність відображення електромагнітних процесів та універсальність щодо режимів;
- простота математичного обґрунтування моделі;
- зв'язок з основною частиною схеми через струми і напруги під час роботи ЕМП у складі системи.

Відомі математичні моделі ЕМП [1, 2] ґрунтуються на теорії електромагнітного поля та теорії електромагнітних кіл і спрямовані на визначення інтегральних параметрів – тягових зусиль, струмів обмоток, тоді як під час проектування цих пристроїв важливими є диференціальні параметри – просторово-часовий розподіл векторів напруженості магнітного поля і магнітної індукції. Комбіновані методи моделювання режимів ЕМП дають змогу використовувати позитивні властивості колових та польових моделей. У таких моделях частину пристрою описують векторні рівняння електромагнітного поля у вузлах дискретної сітки, яка накриває вибрану розрахункову область, іншу – рівняння електромагнітних кіл (у тому числі з розподіленими параметрами). Така математична модель, доповнена початковими і граничними умовами, дає найдостовірніші результати за мінімальної кількості диференціальних рівнянь, що

описують конструкцію, і, одночасно, забезпечує високу точність розрахунку параметрів магнітного поля.

Ми розробили напівпольову математичну модель для розрахунку перехідних та усталених процесів в ЕМП на підставі поєднання методів теорії електромагнітних кіл і методів теорії електромагнітного поля. Методи теорії електромагнітного поля застосовують лише для опису фізичних процесів у вибраній розрахунковій області, що складається з частини магнітопроводу і повітряного проміжку. Фізичні процеси в решті конструкції та обмотці ЕМП описують рівняннями електромагнітного кола.

Головне диференціальне рівняння для розрахунку електромагнітного поля в основній частині магнітопроводу, записане стосовно векторного магнітного потенціалу в нелінійному анізотропному середовищі, має вигляд [3]

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{\Gamma}^{-1} \nabla \times (\mathbf{N} \nabla \times \mathbf{A}), \quad (1)$$

де \mathbf{A} – векторний потенціал електромагнітного поля; $\mathbf{\Gamma}$ – матриця статичних електропровідностей; \mathbf{N} – матриця обернених магнітних проникностей, компоненти якої залежать від параметрів середовища.

Запишемо векторне рівняння (1) у циліндричній системі координат і з метою спрощення подальшого викладу розглянемо випадок, коли \mathbf{A} має лише один просторовий компонент

$$\mathbf{A} = \alpha_0 A. \quad (2)$$

У такому разі отримаємо

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + v \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + v \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} A + v \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} v A \right], \quad (3)$$

де A – аксіальний компонент векторного потенціалу електромагнітного поля; γ – електропровідність середовища в аксіальному напрямі; v – обернена магнітна проникність (релактивність) середовища; r, z – просторові координати.

Рівняння (3) описує електромагнітне поле у феромагнітних зонах ЕМП. У повітряному проміжку рівняння (3) спрощене:

$$0 = v_0 \left(\left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) - \frac{A}{r^2} \right), \quad (4)$$

де v_0 – релактивність повітря.

У разі математичного моделювання практичних задач електродинаміки система рівнянь (3), (4) повністю описує електромагнітний процес у кусково-однорідних зонах, що складаються з магнітопроводів, струмопроводів, діелектриків.

Для однозначного розв'язування диференціальних рівнянь (3), (4) необхідно задати початкові і граничні умови. Початкові умови задають значення функції у початковий момент часу $t=0$, граничні умови – на границі замкнутого простору S ,

усередині якого шукають розв'язок диференціальних рівнянь. Гранична умова для рівняння електромагнітного поля має вигляд

$$\alpha_0 A(r, z, t) + \alpha_1 \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial n} = \Psi(r, z, t), \quad r, z \in S, \quad (5)$$

де $\Psi(r, z, t)$ – відома функція часу на границі зони інтегрування S ; α_0, α_1 – сталі коефіцієнти, що набувають значення 0 і 1; $\frac{\partial}{\partial n}$ – нормальна складова похідної.

За просторовим розподілом поля вектора \mathbf{A} визначаємо поле вектора магнітної індукції

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6)$$

Рівняння (6) у циліндричній системі координат має вигляд

$$B_r = \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \right); \quad B_z = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad (7)$$

а модуль вектора магнітної індукції B визначається за формулою

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_z^2}. \quad (8)$$

Магнітну напругу V на межі області інтегрування знаходимо з виразу

$$V = v_0 \int_0^{z_2} B_z(r_2, t) dz. \quad (9)$$

За просторовим розподілом модуля вектора магнітної індукції B та характеристикою намагнічування матеріалу $B=B(H)$ обчислюємо значення оберненої магнітної проникності v в зонах з феромагнітним середовищем.

Решту конструкції магнітопроводу ЕМПі подамо як зосереджений магнітний опір R_m . Остаточну розрахункову схему показано на рис. 1.

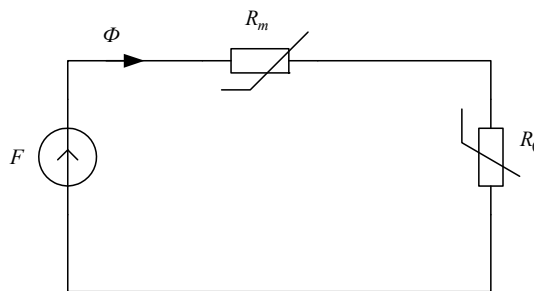


Рис. 1. Розрахункова схема пристрою.

Тут магнітний опір R_0 є аналогом простору, що складається з частини магнітопроводу і повітряного проміжку. Реакцією цієї ділянки на дію потоку Φ є магнітна напруга V .

Розрахунок магнітного опору R_m виконаємо методами теорії кіл для скінченних ділянок простору, що мають форму циліндрів і паралелепіпедів, з урахуванням залежностей $B=B(H)$ для відповідних елементів:

$$R_m^{(n)} = \frac{1}{\mu^{(n)}} \cdot \frac{l}{S}, \quad (10)$$

де n – номер ділянки апроксимації кривої $B=B(H)$; l , S – довжина і переріз елемента електромагніта.

Диференціальне рівняння котушки намагнічування має вигляд

$$\frac{d\Psi}{dt} = u - ri, \quad (11)$$

де Ψ , u , i – повне потокозчеплення, напруга та струм котушки; r – резистивний опір котушки.

Струм котушки знаходимо з рівняння магнітного кола (див. рис. 1)

$$i = (V + R_m \Phi) / w, \quad (12)$$

де w – кількість витків.

Повне потокозчеплення запишемо як суму потоку розсіювання та основного

$$\Psi = L_\sigma i + w\Phi, \quad (13)$$

де L_σ – індуктивність розсіювання котушки.

Розв'яжемо спільно (12) і (13), одержимо вираз для обчислення магнітного потоку:

$$\Phi = \frac{\Psi - L_\sigma V / w}{w + L_\sigma \rho / w}. \quad (14)$$

Система рівнянь (3)–(14) утворює напівпольову математичну модель ЕМП. За результатами числової реалізації виразів (3), (4) знайдемо розв'язок рівняння квазістационарного електромагнітного поля на кожному часовому кроці, відтак, згідно з (7), (8), обчислимо компоненти і модуль вектора магнітної індукції. Значення оберненої магнітної проникності феромагнетика використаємо для розрахунку магнітного опору ділянок магнітопроводу (10) та під час наступного часового кроку числового інтегрування рівнянь (3), (4).

Запропонований алгоритм дає змогу обчислити магнітні параметри ЕМП, а саме – їхній просторовий і часовий розподіл. Зазначимо, що запропонована модель працює в режимі заданої напруги, що є характерним для більшості ЕМП.

Результати комп'ютерного симулювання. На підставі запропонованого алгоритму створена цифрова модель ЕМП постійного струму. Розроблена програма складається з таких блоків:

- вибору кроку (Δr , Δz , Δt) і побудови прямокутної сітки, що накриває вибрану область інтегрування;

- формування та розв'язування системи алгебричних рівнянь, що реалізує метод скінченних різниць;
- інтегрування системи диференціальних рівнянь за часом;
- обчислення магнітних параметрів і струму намагнічувальної обмотки.

Нижче (див. рис. 2) наведено результати комп'ютерного симулювання електромагнітного поля електромагніта сильних полів за таких вхідних даних: $U=500$ В, $r=2,2$ Ом, $w=2\ 200$.

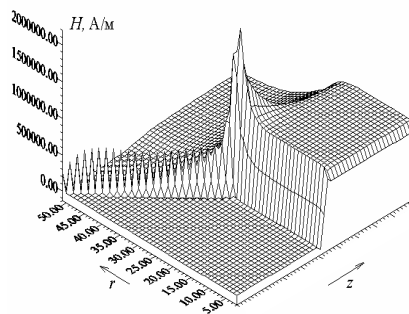


Рис. 2. Розподіл модуля вектора напруженості магнітного поля в розрахунковій зоні електромагніта в фіксований момент часу.

Максимального значення напруженість магнітного поля досягає в повітряному проміжку між полюсами електромагніта.

Дослідження дали змогу оптимізувати конструкцію електромагніта та на 15–20% підвищити ефективність використання намагнічувальної сили обмотки.

Отже, розроблена і реалізована математична модель дає змогу виконувати якісний і кількісний аналіз параметрів електромагнітного поля в електромагнітних пристроях у перехідному й усталеному режимах.

Комп'ютерне симулювання допомагає оптимізувати конструктивні параметри електромагнітного пристрою, що забезпечує підвищення їхніх експлуатаційних параметрів.

1. *Нейман Л.Р., Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники. Л.: Энергоиздат. 1981. 416 с.
2. *Шегедин О.І., Мадай В.С.* Математичне моделювання магнітних систем з постійними магнітами // Proceedings 7-st International Modelling School. Alushta (Ukraine). 2002. P. 109.
3. *Чабан В.Й.* Математичне моделювання електромагнітних процесів. К.: НМК ВО, 1992. 323 с.

**SEMIFIELD MATHEMATICAL MODEL
OF ELECTROMAGNETIC DEVICES****V. Maday, O. Shegedyn, M. Sokolovsky***Lviv Polytechnic National University
Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine*

Semifield mathematical model of electromagnetic devices is proposed. Interpolar interval of device describes by quazistationary equations of electromagnetic field and other construction remainder by equations of electromagnetic circles. Results of computer simulation are given.

Key words: mathematical model, electromagnet, electromagnetic field.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005

Прийнята до друку 01.09.2005