ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА 2005. Вип. 58. С. 73-76
ELECTRICAL ENGINEERING 2005. Is. 58. P. 73-76

УДК 51.001.57., 621.313.33

НОВИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ УСТАЛЕНИХ МОНОГАРМОНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В. Чабан

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, Львів 79013, Україна
vtchaban@polynet.lviv.ua

Запропоновано новий підхід до аналізу усталених процесів лінійних електричних кіл моногармонічного струму за правилами аналізу кіл постійного струму. Аналіз виконано у сфері координатних перетворень. Реальні струми та напруги знайдено в результаті обернених координатних перетворень. Метод аналізу орієнтований на числові методи. Наведено приклад аналітичного аналізу.

Ключові слова: лінійні кола, усталені процеси, координатні перетворення.

Відомо, що аналіз кіл постійного струму значно простіший, ніж відповідний аналіз кіл змінного струму. Тож напрошується ідея: а чи не можна аналіз кола змінного струму звести до аналізу відповідного кола постійного струму в результаті певних перетворень і, проаналізувавши перетворене коло, повернутися до реальних фізичних величин. Виявляється, що така можливість є, якщо скористатися рухомими просторовими координатами.

Відомо, що синусоїдні й косинусоїдні функції можна розглядати як проекції деякого зображувального вектора, що рухається зі сталою кутовою швидкістю ω, на нерухомі декартові координати x, y. Тож якщо перейти до рухомих координат x', y', що обертаються синхронно з зображувальним вектором, то його проекції на ці осі будуть сталими числами. Якщо розглянемо амплітуди напруг чи струмів джерел електромаґнетної енергії як зображувальні вектори, то нашу ідею реалізуємо в дуже простий спосіб.

Перетворення координат виконаємо звично

$$\lambda' = \Pi\lambda; \qquad \lambda = \Pi^{-1}\lambda', \tag{1}$$

де $\lambda(\lambda = e, u, i) = (\lambda_c, \lambda_s)$ – вектор косинусних і синусних проекцій зображувального вектора амплітуд електрорушійної сили (ЕРС) (e), напруг (u), струмів (i), причому штрих тут і надалі означає на причетність до рухомої системи координат; Π, Π^{-1} – пряма й обернена матриці повороту координат:

$$\Pi = \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\omega t & \sin\omega t \\ \hline -\sin\omega t & \cos\omega t \\ \hline \end{array}; \quad \Pi^{-1} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \hline \sin\omega t & \cos\omega t \\ \hline \end{array}, \qquad (2)$$

де t – час.

Розглянемо рівняння головних ідеальних двополюсних елементів: джерела напруги (ЕРС), резистора, котушки індуктивності, конденсатора.

1. Джерело напруги. Якщо скористатися виразами (1), (2), то синусоїдна ЕРС у проекціях на рухомі координати зводиться до сталих за часом значень

$$\begin{array}{|c|}\hline e_c \\ \hline e_s \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\omega t & \sin\omega t \\ \hline -\sin\omega t & \cos\omega t \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline E_m\cos(\omega t+\psi) \\ \hline E_m\sin(\omega t+\psi) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline E_m\cos\psi \\ \hline E_m\sin\psi \\ \hline \end{array}, \qquad (3)$$

де E_m – амплітуда ЕРС; ψ – початкова фаза.

2. Резистор. Рівняння резистора в рухомій системі координат згідно з (1), (2) залишається таким самим:

$$u'_R = r\,i'_R\,, \qquad (4)$$

де r – опір резистора.

3. Котушка індуктивності. Запишемо спершу її рівняння в нерухомій системі координат:

$$Ldi_L / dt = u_L\,, \qquad (5)$$

де L – індуктивність котушки.

У перетвореній системі координат це рівняння згідно з (1), (2) ускладнюється:

$$Ldi'_L / dt = u'_L - \omega Lqi', \qquad (6)$$

де q – матриця

$$q = \frac{1}{\omega}\Pi\frac{d\Pi^{-1}}{dt} = \begin{array}{|c|c|}\hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}. \qquad (7)$$

4. Конденсатор. Запишемо також рівняння конденсатора в нерухомій системі координат:

$$Cdu_C / dt = i_C\,, \qquad (8)$$

де C – ємність конденсатора.

У рухомій системі координат згідно з (1), (2) рівняння (8) набуває вигляду

$$Cdu'_C / dt = i'_C - \omega Cqu'_C\,. \qquad (9)$$

Що ж до **структурних рівнянь** (записаних за першим і другим законами Кірхгофа), то вони згідно з (1), (2) у перетворених координатах залишаються такими самими:

$$\sum_k i'_k = 0; \qquad \sum_k e'_k, u'_k = 0. \qquad (10)$$

Структурні рівняння (10) разом з рівняннями елементів (3), (4), (6), (9) утворюють повну систему гібридних рівнянь електричного кола в перетвореній обертовій системі координат. Розв’язавши її, знайдемо проекції зображувальних векторів невідомих напруг і струмів на рухомі координатні осі. Реальні величини отримуємо в результаті зворотного перетворення згідно з другим виразом (1).

За задумом метод розроблений для аналізу усталених процесів. У такому разі (6) і (9) спрощуються, бо часові похідні в колі усталеного постійного струму дорівнюють нулю:

$$u_L' = x_L q i'; \qquad u_C' = -x_C q i_C', \tag{11}$$

де $x_L = \omega L$; $x_C = 1/(\omega C)$ – реактанси котушки індуктивності й конденсатора.

Тепер вихідну систему рівнянь усталеного процесу кола становлять алгебричні рівняння (4), (10), (11). На їхній підставі можна будувати інші методи аналізу, наприклад, контурних струмів, вузлових напруг тощо.

Як приклад, розв'яжемо елементарну задачу з детальним математичним супроводом.

Приклад. Задано коло послідовно сполучених трьох ідеальних лінійних елементів *R, L, C*, заживлених джерелом синусоїдної напруги $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Знайти усталений струм у колі.

Розв'язання. Запишемо за другим законом Кірхгофа структурне рівняння (10):

$$u' + u' + u' = e'. \tag{12}$$

Підставимо в (12) рівняння елементів (3), (4), (11), одержимо

$$(r + xq)i' = e'; \quad x = x_L - x_C, \tag{13}$$

або згідно з (1), (7) у розгорнутому вигляді

$$\begin{array}{|c|c|}\hline r & -x \\ \hline x & r \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline i_c' \\ \hline i_s' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline E_m \cos\psi \\ \hline E_m \sin\psi \\ \hline \end{array}. \tag{14}$$

Розв'яжемо (14) стосовно струмів, одержимо

$$\begin{array}{|c|}\hline i_c' \\ \hline i_s' \\ \hline \end{array} = \frac{1}{r^2 + x^2} \begin{array}{|c|c|}\hline r & x \\ \hline -x & r \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline E_m \cos\psi \\ \hline E_m \sin\psi \\ \hline \end{array}. \tag{15}$$

Скористаємося другими виразами (1) і (2), знайдемо реальний струм:

$$\begin{array}{|c|}\hline i_c \\ \hline i_s \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \hline \sin\omega t & \cos\omega t \\ \hline \end{array} \frac{1}{r^2 + x^2} \begin{array}{|c|c|}\hline r & x \\ \hline -x & r \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline E_m \cos\psi \\ \hline E_m \sin\psi \\ \hline \end{array}. \tag{16}$$

У результаті математичних спрощень вираз (16) набуде остаточного вигляду

$$\begin{array}{|c|}\hline i_c \\ \hline i_s \\ \hline \end{array} = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + x^2}} \begin{array}{|c|}\hline \cos(\omega t + \psi - \mathrm{arctg}(x/r)) \\ \hline \sin(\omega t + \psi - \mathrm{arctg}(x/r)) \\ \hline \end{array}. \tag{17}$$

Зрозуміло, що в (17) нас цікавить тільки синусний компонент струму i_s, косинусний i_c опускаємо. Достовірність результату (17) очевидна.

Метод обмежений моногармонічним станом лінійних кіл як і класичний та символічний методи. Він як і вони, потребує розв'язування $2n$ алгебричних рівнянь, де n – кількість шуканих змінних. Нагадаємо, що метод призначений не для аналітичного розв'язування рівнянь стану, а для числового, де його перевага над обома згаданими безперечна в програмній реалізації, оскільки процес обчислень легко формалізувати.

THE NEW APPROACH TO CIRCUIT STEADY-STATE MONOHARMONIOUS PROCESSES ANALYSIS

V. Tchaban

National University Lviv Polytechnic
Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine
vtchaban@polynet.lviv.ua

In the paper is proposed new method of linear AC circuit steady-state monoharmonious processes analysis according to rules of DC circuit analysis. The analysis is realised in area of coordinate transformation. The real voltages and currents are determined according to inverse coordinate transformation. The method is intended for numerical methods. The example of analytic analysis is added.

Key words: linear AC circuit, monoharmonious steady-state processes, rules of DC circuit analysis, coordinate transformation.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005
Прийнята до друку 01.09.2005