УДК 621.313.33

МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ В АВТОНОМНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

В. Маляр, А. Маляр

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, Львів 79013, Україна

Викладено основи методу розрахунку стаціонарних періодичних режимів автономних нелінійних електричних кіл шляхом розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь, що описують динамічний режим, з використанням диференціального сплайн-методу.

Ключові слова: періодичний режим, нелінійні електричні кола, сплайн-метод.

У багатьох прикладних задачах електротехніки, радіотехніки, електромеханіки є проблема дослідження періодичних режимів автономних електричних кіл. Ця задача набагато складніша від розрахунку стаціонарних режимів у разі періодичних збурень, оскільки період коливань невідомий. У [3] зазначено, що період коливань в автономних системах визначений внутрішніми параметрами системи, які залежать від гармонік режимних величин.

У [3] задачу пошуку періодичних режимів автономних електричних кіл розв'язано шляхом розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (ДР). Оскільки початкові умови наперед не відомі, то їх вибирають довільно. Це створює додаткові проблеми, тому що результат розрахунку стаціонарного режиму методом усталення у випадку його неоднозначності може залежати від початкових умов. Іншою проблемою за такого способу розрахунку є ідентифікація закінчення перехідного процесу, тому що остаточний період коливань T завчасно не відомий. З огляду на це в [3] запропоновано порівнювати не тільки значення функцій, а й їхніх похідних на початку та в імовірному кінці періоду. Ще одною проблемою розв'язування задач на підставі розрахунку перехідного процесу до його усталення є накопичення помилок, а отже, і точність отриманих результатів [3].

Нижче запропоновано метод пошуку стаціонарних періодичних режимів автономних електричних кіл на підставі використання диференціального сплайн-методу [1], застосування якого до розв'язування цієї задачі полягає в такому.

Автономне електричне коло в загальному випадку описує нелінійна система ДР вигляду

$$\frac{d\vec{y}}{dt} + \vec{z}\left(\vec{y}\right) = 0\,, \qquad (1)$$

де $\vec{y} = colon\left(y_1, \ldots, y_m\right)$ – m-вимірний вектор, компоненти якого є функціями часу; $\vec{z}\left(\vec{y}\right) = colon\left(z_1\left(\vec{y}\right), \ldots, z_m\left(\vec{y}\right)\right)$ – m-вимірний вектор, компонентами якого є нелінійні функції вектора $\vec{y}$.

Нехай нелінійна система ДР (1) має хоча б один періодичний розв'язок $\vec{y}\left(t\right) = \vec{y}\left(t+T\right)$, де T – період. Апроксимуємо на сітці n+1 вузлів періоду T кожну компоненту вектора $\vec{y}$ кубічними сплайнами вигляду

$$y(t) = a_j + b_j(t_j - t) + c_j(t_j - t)^2 + d_j(t_j - t)^3,$$

де j – номер ділянки; a_j, b_j, c_j, d_j – коефіцієнти сплайна.

Отримаємо нелінійну систему скінченних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{3}{h_j^2} a_{j-1} + \left(-\frac{3}{h_j^2} + \frac{3}{h_{j+1}^2}\right) a_j - \frac{3}{h_{j+1}^2} a_{j+1} = \\ &= \frac{1}{h_j} b_{j-1} + \left(\frac{2}{h_j} + \frac{2}{h_{j+1}}\right) b_j + \frac{1}{h_{j+1}} b_{j+1}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

З урахуванням умов періодичності $a_{j+n} = a_j$; $b_{j+n} = b_j$, а також того, що $a_j = y_j$; $b_j = -\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_j}$, запишемо систему (2) у вигляді

$$H_c \vec{Y}_c = \vec{Z}_c\,, \tag{3}$$

де H_c – блоково-діагональна матриця, елементи якої визначені коефіцієнтами сплайна і залежать від сітки вузлів періоду; $\vec{Y}_c, \vec{Z}_c$ – вектори, які складаються зі значень векторів $\vec{y}_j, \vec{z}_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ в n вузлах періоду.

Нелінійна система скінченних рівнянь (3) складається з nm рівнянь, а невідомих має на одиницю більше (невідомим є період T). Для того, щоб отримати замкнену систему, необхідно додати ще одне рівняння. Утворимо його так:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = T\,, \tag{4}$$

де $h_j = t_j - t_{j-1}$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – j-й крок сітки.

З величин кроків сітки h_j формуються елементи матриці H_c.

Отже, повна система складається з рівнянь (3) та (4). Запишемо її у вигляді одного векторного рівняння

$$\vec{X}\left(\vec{P}\right) = 0\,, \tag{5}$$

де $\vec{P} = colon\left(\vec{Y}_c, T\right)$.

Оскільки система (5) нелінійна, то її можна розв'язати лише числовими ітераційними методами. Однак тут є проблема як збіжності ітераційного процесу, так і пошуку всіх можливих періодичних режимів та дослідження їх на стійкість. Найефективнішим за збіжністю є ітераційний метод Ньютона, однак тоді треба мати таке початкове наближення вектора $\vec{P}^{(0)}$, яке б було в околі збіжності ітераційного процесу. Тому систему (5) розв'яжемо методом продовження по параметру в модифікації [4].

Для цього задамо довільне значення вектора $\vec{P} = \vec{P}(0)$ та обчислимо вектор $\vec{X}^{(0)} = \vec{X}\left(\vec{P}^{(0)}\right)$. Далі утворимо повну систему скінченних рівнянь у вигляді

$$\vec{X}\left(\vec{P}\right) - \lambda\vec{X}^{(0)} = 0\,, \tag{6}$$

в якій λ – скалярний параметр $\left(0 \le \lambda \le 1\right)$.

Нелінійна система (6) при λ=0 тотожна системі (5), а при λ=1 її розв'язком є вектор $\vec{P} = \vec{P}^{(0)}$. Отже, неперервній зміні λ від 1 до 0 відповідає зміна вектора $\vec{P}$ від $\vec{P}^{(0)}$ до $\vec{P}$, що є розв'язком. Цю залежність можна отримати диференціальним методом. Для цього продиференціюємо рівняння (6) за λ. Отримаємо

$$W\frac{d\vec{P}}{d\lambda} == \vec{X}^{(0)}\,, \tag{7}$$

де $W = \dfrac{\partial\vec{X}}{\partial\vec{P}}$ – матриця Якобі системи (6).

Проінтегруємо числовим методом нелінійну систему ДР (7) за λ у межах від λ =1 до λ=0, отримаємо багатовимірну залежність

$$\vec{P} = \vec{P}\left(\lambda\right). \tag{8}$$

У результаті при λ=0 вектор $\vec{P}$ буде близький до корення рівняння (5). Його можна уточнити за ітераційною схемою методу Ньютона згідно з формулою

$$\vec{P}^{(k+1)} = \vec{P}^{(k)} - \Delta\vec{P}^{(k)}\,, \tag{9}$$

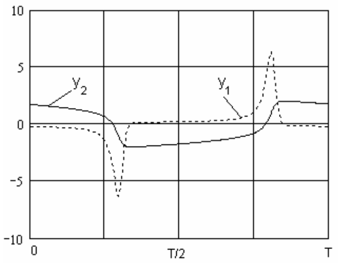
де приріст $\Delta\vec{P}^{(k)}$ вектора $\vec{P}$ визначений з матричного рівняння

$$W\Delta\vec{P}^{(k)} = \vec{X}\left(\vec{P}^{(k)}\right). \tag{10}$$

Застосування викладеного вище методу проілюструємо на прикладі розв'язування відомого [2, 3] рівняння Ван-дер-Поля, що описує коливальний процес в автономній системі. Якщо записати це рівняння у вигляді системи рівнянь (1), то вектори $\vec{y}$ і $\vec{z}$ мають зміст

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 - \mu\left(1 - y_1^2\right)y_2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Відомо, що різним значенням коефіцієнта μ відповідають різні значення частоти автоколивань, а, отже, і періоду *T*. На рисунку показано результат розрахунку стаціонарного періодичного режиму викладеним вище методом за умови μ = 4. Відповідне значення періоду T = 10,3 с.



Періодичний розв’язок системи рівнянь (1)
за визначеного залежностями (11) значення вектора $\vec{Z}$.

Отже, запропонований числовий метод дає змогу розрахувати стаціонарний періодичний режим без розв’язування задачі в часовій області. Задача пошуку періодичних режимів автономних нелінійних електричних кіл розв’язана як крайова для системи ДР з періодичними крайовими умовами. Результатом розрахунку є залежності координат режиму на періоді повторюваності процесу.

1. *Маляр В.С.* Основные положения сплайн-метода расчета периодических режимов работы электрических цепей // Электроника и связь. 1998. Вып. 5. С. 11–14.
2. *Поляковский Ю.В., Синицкий Л.А.* О расчете периодических режимов в нелинейных автономных цепях на ЭЦВМ // Теор. электротехника. 1972. Вып 13. С. 71–75.
3. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. К.: Наук. думка, 1985. 224 с.
4. *Яковлев М.Н.* К решению систем нелинейных уравнений методом дифференцирования по параметру // Журн. вычисл. математики и матем. физики. Т. 4. 1964. № 1. С. 146–149.

METHOD OF PERIODIC REGIMES ANALYSIS FOR NONLINEAR AUTONOMOUS ELECTRIC CIRCUITS

V. Malyar, A. Malyar

Lviv Polytechnic National University
Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine

The main theses of the method of designing stationary periodic modes of autonomous non-linear electric circuits by solving a boundary problem for differential equations, which describe the dynamic mode, applying the differential spline-method have been expounded.

Key words: periodic modes, non-linear electric circuits, spline-method.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005
Прийнята до друку 01.09.2005