МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ТА ДИСКРЕТНИХ КІЛ І СИСТЕМ

УДК 621.372.061

ПРО МАКСИМАЛЬНЕ ЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТИ, ВИЩЕ ЯКОЇ НЕМОЖЛИВЕ ЗБУДЖЕННЯ У ДИСИПАТИВНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМАХ

В. Одінцова, Л. Синицький

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. генерала Тарнавського, 107, Львів 79017, Україна

Відомо, що в дисипативних колах існує частотний діапазон збудження, де можливе виникнення нестійкості станів рівноваги. Знайдено верхню межу цього діапазону. Отримані результати є евристичними; їхня вірогідність підтверджена на практично важливому прикладі.

Ключові слова: параметричне збудження, стійкість стану рівноваги, частотний інтервал.

Дослідження стійкості параметричних систем упродовж останніх 100 років, здебільшого, стосувалось консервативних систем. Проте для багатьох практичних завдань важливе значення мають проблеми, пов'язані з системами, де втрати є досить значними. Тому необхідне визначення умов, де неможливе параметричне збудження.

Розглянемо систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\left(\frac{t}{T}\right)\mathbf{x}, \tag{1}$$

де $\mathbf{x}$ – n-вимірний вектор; $\mathbf{A}(t)$ – неперервна (або кусково-неперервна) на $(-\infty, \infty)$ періодична з періодом T матриця

$$\mathbf{A}(t+T) \equiv \mathbf{A}(t).$$

Відомо, що матриця $\mathbf{A}(t)$ стійка (асимптотично стійка) за довільного фіксованого значення t. Задача полягає у визначенні частоти $\omega_{\text{кр}} = \dfrac{2\pi}{T_{\text{кр}}}$, вище якої неможливе параметричне збудження.

Для стійкої системи другого порядку, якщо нема дисипативного доданка

$$\frac{d^2\,\mathrm{x}}{dt^2}+\omega_0^2\left(t\right)\mathrm{x}=0\,, \tag{2}$$

відомий критерій Ляпунова, згідно з яким $\omega_{\text{кр}}$ визначають із нерівності

$$0\le T\int_0^T\omega_0^2\left(t\right)dt\le 4,\quad \omega_{\text{кр}}=\frac{2\pi}{T_{\text{кр}}}\,. \tag{3}$$

Відомо також, що цей критерій не можна поліпшити.

Обмежимось випадком, коли матриця $\mathbf{A}\left(t\right)$ при фіксованому t $t\in\left[0,T\right]$ гурвіцева, тобто всі дійсні частини її власних чисел від'ємні.

У задачі (1) перейдемо до нових змінних. Нехай $\frac{t}{T}=\theta$. Тоді отримаємо таке рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta}=T\mathbf{A}\left(\theta\right)\mathbf{x}\,, \tag{4}$$

де $\mathbf{A}\left(\theta\right)$ – неперервна (або кусково-неперервна) періодична матриця з періодом 1,

$$\mathbf{A}\left(\theta+1\right)\equiv\mathbf{A}\left(\theta\right).$$

Матрицю монодромії будемо шукати шляхом дискретизації відрізка [0,1] точками $\theta_k=\frac{k}{N}$.

Тоді наближене значення матриці монодромії $\mathbf{X}\left(1\right)$ обчислимо за формулою (приймаємо $\mathbf{X}\left(0\right)=\mathbf{I}$)

$$\mathbf{X}\left(1\right)=\prod_{k=N-1}^{0}\mathbf{exp}\left(T\mathbf{A_k}\,\frac{1}{N}\right)\cdot\mathbf{I},\quad \mathbf{A_k}=\mathbf{A}\left(\frac{k}{N}\right). \tag{5}$$

У цьому випадку $\mathbf{X}\left(1\right)$ є матрицею монодромії деякої системи, отриманої із (4) шляхом заміни неперервної матриці $\mathbf{A}\left(\theta\right)$ кусково-сталою матрицею $\mathbf{A}\left(\theta_k\right)=\mathbf{A_k}$ $\left(k=\overline{0,N-1}\right)$. Відомо, що можна досягти будь-якої точності в разі обчислення таким способом матриці монодромії, збільшуючи кількість точок N розбиття відрізка [0,1].

На кожній ділянці $\left[\theta_k,\ \ \theta_{k+1}\right]$ рівняння (4) замінюємо різницевим рівнянням за формулою Ейлера, тобто для обчислення матриці монодромії в цьому випадку отримуємо

$$\mathbf{X}\left(1\right)=\prod_{k=N-1}^{0}\left(\mathbf{I}+\frac{T}{N}\mathbf{A_k}\right). \tag{6}$$

Відомо, що метод Ейлера для лінійної системи зі сталою матрицею **A** погіршує стійкість, тобто стійкий стан рівноваги вихідної неперервної системи перетворюється в нестійке вище деякого критичного кроку, який у випадку, що розглядаємо, має порядок $\frac{T}{N}$. Можна очікувати, що застосування (6) замість (5) дасть занижене значення $T_{\text{кр}}$ порівняно з вихідною задачею.

Зробимо ще один крок до спрощення задачі. У разі перемноження в правій частині (6) обмежимось лінійними членами відносно $\frac{T}{N}$, тобто

$$\mathbf{X}(1) \cong \mathbf{I} + \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A_k} \ . \tag{7}$$

Стосовно (7) зазначимо, що грубо оцінити похибку в разі переходу від (6) до (7) можна у випадку сталої матриці **A**. В цьому випадку за достатньо великого значення N

$$\prod_{k=N-1}^{0} \left(\mathbf{I} + \frac{T}{N} \mathbf{A} \right) = \left(\mathbf{I} + \frac{T}{N} \mathbf{A} \right)^N \cong \mathbf{exp}\left(\mathbf{A}T \right).$$

В одновимірному випадку $A = \frac{1}{T}$ перехід до (7) еквівалентний заміні точного значення e = 2,718 наближеним e = 2. Отже, похибка в цьому випадку становить приблизно 35%.

Позначимо $\mathbf{A_{сер}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A_k}$, тоді

$$\mathbf{X}(1) \cong \mathbf{I} + T\mathbf{A_{сер}} . \tag{8}$$

На підставі наведених міркувань висунемо гіпотезу.

Якщо матриці $\mathbf{A_{сер}}$ відповідає стійкий стан рівноваги, то для вихідної системи стійкість гарантована. Отже, розглянемо випадок, коли $\mathbf{A_{сер}}$ – гурвіцева матриця. Якщо так, то її власні значення λ_i запишемо у вигляді

$$\lambda_i = -\sigma_i + j\mu_i , \quad \sigma_i > 0 \quad \left(i = \overline{1, n} \right).$$

Для стійкості розв’язку необхідно і достатньо, щоб модулі власних значень матриці монодромії були менші від одиниці:

$$\left| \rho_i \right| < 1 \quad \left(i = \overline{1, n} \right), \tag{9}$$

де ρ_i – власні значення $\mathbf{X}(1)$.

З урахуванням (8) запишемо

$$\rho_i = 1 + T\lambda_i = 1 - T\sigma_i + jT\mu_i \quad \left(i = \overline{1, n} \right).$$

Тоді

$$|\rho_i| = \sqrt{(1 - T\sigma_i)^2 + (T\mu_i)^2} < 1 \quad \left(i = \overline{1, n}\right).$$

Звідси

$$T < \frac{2\sigma_i}{|\lambda_i|^2} \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \tag{10}$$

Оскільки (10) повинно виконуватися для всіх i, то можна записати

$$T < \min_i \frac{2\sigma_i}{|\lambda_i|^2}. \tag{11}$$

Отже,

$$T_{кр} = \min_i \frac{2\sigma_i}{|\lambda_i|^2}.$$

Розглянемо приклад параметричної системи другого порядку

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{d y}{dt} + \omega^2 \left(1 + m \sin \nu t\right) y = 0,$$

або

$$\begin{aligned} &\frac{d x_1}{dt} = x_2; \\ &\frac{d x_2}{dt} = -\omega^2 \left(1 + m \sin \nu t\right) x_1 - 2\delta x_2. \end{aligned} \tag{12}$$

У разі переходу до безрозмірного часу $\theta = \dfrac{t}{2\pi / \nu}$ (12) набуває вигляду

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \frac{2\pi}{\nu} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 + m \sin 2\pi\theta\right)\omega^2 & -2\delta \end{pmatrix} \mathbf{x} = \frac{2\pi}{\nu} \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Середнє значення матриці

$$\mathbf{A}_{\mathbf{cep}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta \end{pmatrix}.$$

Власні значення $\mathbf{A}_{\mathbf{cep}}$

$$\lambda = -\delta \pm j\sqrt{\omega^2 - \delta^2}.$$

Оскільки $|\lambda|^2 = \omega^2$, то отримуємо для критичного $T_{\text{кр}} = \dfrac{2\pi}{\nu_{\text{кр}}}$

$$\frac{2\pi}{\nu_{кр}} = \frac{2\delta}{\omega^2},$$

або

$$\frac{\nu_{кр}}{\omega} = 2\pi Q, \quad Q = \frac{\omega}{2\delta},$$

де Q – добротність.

При $\delta = 0$ критерій Ляпунова дає таку оцінку для $\nu_{кр}$: $\frac{\nu_{кр}}{\omega} = \pi$.

Отже, як бачимо, для значень $Q<0{,}5$ у разі оцінювання критичного значення частоти можна застосовувати підхід, описаний вище. При $Q>0{,}5$ треба користуватись критерієм Ляпунова.

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
2. *Якубович В. А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.

ON EVALUATION OF MAXIMAL FREQUENCY FOR WHICH INSTABILITY OF STEADY STATE IS POSSIBLE

V. Odintsova, L. Sinitsky

Ivan Franko Lviv National University
Tarnavskogo Str., 107, Lviv 79017, Ukraine

It is well known that in dissipative parametric circuits exists a frequency interval in which stability of the steady state is impossible. It is brief the maximal value of this interval is found. Euristic recommendation were obtained. Example which proves practical meaning of result is given.

Key words: parametric exitation, stability of steady state, frequency interval.

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2005
Прийнята до друку 01.09.2005