

УДК 621.313.32

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НЕЯВНОПОЛЮСНОГО СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА З УРАХУВАННЯМ ЕКСЦЕНТРИСИТЕТУ. ЧАСТИНА 1

М. Коцюба, Р. Фільц

*Національний університет „Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна
e-mail Arichka2002@yahoo.com*

Запропоновано математичну модель для розрахунку перехідних процесів трифазного неявнополюсного синхронного генератора з трьома контурами на роторі з урахуванням ексцентриситету та змінного насичення магнетопроводу. Враховано нелінійність електромагнетних зв'язків. Сформовано єдину систему інтегрально-диференціальних рівнянь електричного, механічного та магнітного стану. Розподіл магнетного поля обчислено сітковим методом на підставі рівнянь магнетостатики в одновимірному формулюванні. Інтегрування виконано неявним методом.

Ключові слова: неявнополюсний генератор, ексцентриситет, змінне насичення, нелінійність.

Відомі в літературі математичні моделі, призначені для розрахунку перехідних процесів у електричних машинах, побудовано без урахування ексцентриситету. Однак у реальних машинах унаслідок неминучих технологічних неточностей ексцентриситет завжди є, і дослідження його впливу на роботу машин становить інтерес з погляду виявлення можливих відхилень режимів та процесів від проектних, а також визначення шумів і вібрацій, зумовлених силами одностороннього притягання. Внаслідок широкого використання активних матеріалів у сучасних електричних машинах результати таких досліджень представляють найбільшу практичну цінність, якщо задача розв'язується з урахуванням змінного насичення магнітопроводу як фактора, що визначально впливає на поведінку машин у статиці та динаміці.

Ми розв'яжемо сформульовану задачу стосовно до неявнополюсного трифазного синхронного генератора з трьома контурами на роторі – обвиткою збудження та поперечним демпферними контурами.

Математична модель перехідних процесів такого генератора – це система рівнянь, що складається з диференціальних рівнянь електричного та механічного стану й алгебро-інтегральних рівнянь, які описують нелінійні електромагнітні

зв'язки (ця система отримана в ч. 1 статті), та алгоритм її розв'язування (отриманий у ч. 2 статті).

Для визначення електромагнітних зв'язків у генераторі приймемо такі умови.

- Провідники контурів статора і ротора є розподіленими вздовж кутової координати по колу розточки за гармонічним законом.
- Магнітне поле умовно розділене на робоче поле і поля розсіяння обвиток статора та ротора.
- Потокозчеплення розсіяння кожного контуру є лінійною однорідною функцією струмів контурів, розташованих по той же бік від повітряного проміжку, що й розглядуваний контур, і не залежить від положення ротора.
- Робоче поле плоскопаралельне.
- Реальні зубцеві зони статора і ротора представлено еквівалентною зубцевою зоною, під якою розуміємо рівномірно розподілений уздовж кутової координати нескінченно тонкий шар, що має в радіальних напрямках таку ж характеристику намагнення, як і реальні зубцеві зони, взяті разом.
- Магнітна індукція у повітряному проміжку та еквівалентній зубцевій зоні має тільки радіальну складову, причому зумовленим ексцентриситетом відхиленням радіусів статора та ротора нехтуємо через незначність ексцентриситету порівняно з радіусом розточки.
- В ярі статора (ротора) робоче поле розподілене по будь-якому з радіальних перерізів рівномірно, а магнетна індукція має тільки радіальну складову.
- Значення ексцентриситету і положення точки на розточці статора, що відповідає мінімальному повітряному проміжку, сталі.
- Магнітопровід шихтований, і втрат у сталі нема.
- Електричні контури не мають паралельних гілок.

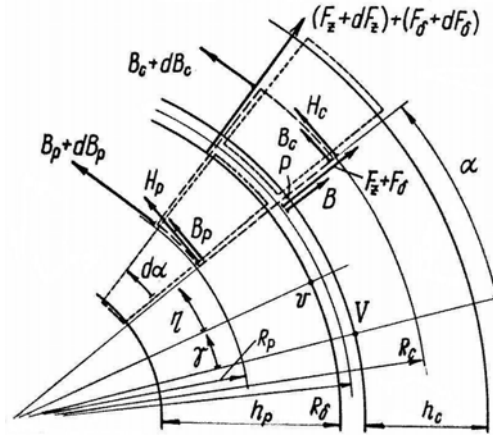
Перш ніж розпочати до формування системи рівнянь, що визначають електромагнетні зв'язки генератора, сформулюємо крайову задачу розрахунку робочого магнетного поля за заданих струмів контурів і кута повертання ротора як систему алгебричних, інтегральних і диференціальних рівнянь та крайових умов, достатніх для визначення магнетного поля в одновимірній постановці та потокозчеплень контурів генератора за прийнятих вхідних припущень.

Виберемо фіксовану на статорі точку V (див. рисунок) і визначимо положення біжучої точки P щодо точки V кутом α . Виберемо фіксовану на роторі точку v і визначимо положення точки P щодо точки v кутом η . Положення ротора визначимо кутом повертання γ як відстанню від точки V до точки v . Отож,

$$\gamma = \alpha - \eta. \quad (1)$$

Положення точки мінімального повітряного проміжку щодо точки V характеризуватимемо кутом ν . Всі кути вимірюватимемо в геометричних радіанах.

Позначимо буквою n_j кутову густину розподілу провідників j -го електричного контуру як кількість провідників цього контуру, що припадає на одиницю кута α .



Сектор поперечного перерізу генератора

Залежність $n_j[\alpha]$ назвемо функцією розподілу провідників j -го контуру [1].

Фази статора, обвитку збудження, поздовжній та поперечний контури демпферної обвитки позначимо, відповідно, a, b, c, f, d, q . Розташуємо точку V на геометричній осі, що проходить посередині полюсного ділення, утвореного обвиткою фази a , що є найближчим за електричною схемою цієї фази до її початку. Точку v розташуємо на аналогічній геометричній осі обвитки збудження. Тоді функції розподілу провідників контуру набудуть вигляду

$$\begin{aligned} n_a &= N_a \sin p\alpha; \quad n_b = N_b \sin(p\alpha - 2\pi/3); \quad n_c = N_c \sin(p\alpha + 2\pi/3); \\ n_f &= N_f \sin(\alpha - \gamma); \quad n_d = N_d \sin p(\alpha - \gamma); \quad n_q = N_q \sin(p(\alpha - \gamma) - \pi/2), \end{aligned} \quad (2)$$

де $N_j = 2w_j / \pi$, $j = (a, b, c, f, d, q)$; w_j – кількість ефективних витків контуру, що дорівнює добутку дійсного числа витків та обвиткового коефіцієнта по основній гармоніці.

Згідно з законом повного струму, для замкнутого контуру інтегрування, показаного на рисунку штриховою лінією, маємо рівняння

$$F_\delta + F_z + H_c R_c d\alpha - (F_\delta + dF_\delta + F_z + dF_z) - H_p R_p d\alpha - \sum_{j=a,b,c,f,d,q} n_j i_j d\alpha = 0, \quad (3)$$

де H_c, H_p – напруженості магнітного поля ярем статора і ротора в радіальному перерізі α , що визначені магнітною індукцією B_c, B_p ярем у цьому перерізі згідно з характеристиками намагнічення сталей статора і ротора

$$H_c = H_c[B_c]; \quad (4)$$

$$H_p = H_p[B_p]; \quad (5)$$

R_c, R_p – радіуси середніх ліній ярем статора і ротора; F_z – зниження магнітної напруги в еквівалентній зубцевій зоні в радіальному перерізі α , що визначається магнітною індукцією B повітряного проміжку в цьому перерізі згідно з характеристикою намагнічення еквівалентної зубцевої зони

$$F_z = F_z[B]; \quad (6)$$

F_δ – зниження магнітної напруги в повітряному проміжку в перерізі α ; воно пов'язане з індукцією B в цьому перерізі співвідношенням

$$F_\delta = \rho_\delta[\alpha]B; \quad (7)$$

тут $\rho_\delta[\alpha]$ – питомий поверхневий магнітний опір повітряного проміжку в перерізі α , що обчислюють за формулою

$$\rho_\delta[\alpha] = \delta[\alpha]k_\delta[\alpha]k_\phi[\alpha] / \mu_0,$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна проникність вакууму; $k_\delta[\alpha], k_\phi[\alpha]$ – коефіцієнти Картера для статора і ротора, які обчислюють за відомою методикою згідно з дійсною довжиною $\delta[\alpha]$ повітряного проміжку в перерізі α . Остання визначається за формулою

$$\delta[\alpha] = R_\delta - e \cos(\alpha - \nu) - \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2(\alpha - \nu)},$$

де R_δ – радіус розточки статора; R – радіус ротора; e – ексцентриситет.

З рівняння (3) з урахуванням виразу (2) маємо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} dF_z / d\alpha + dF_\delta / d\alpha - H_c R_c + H_p R_p + N_a i_a \sin p\alpha + N_b i_b \sin(p\alpha - 2\pi/3) + \\ + N_c i_c \sin(p\alpha + 2\pi/3) + N_f i_f \sin p(\alpha - \gamma) + N_d i_d \sin p(\alpha - \gamma) + \\ + N_g i_g \sin(p(\alpha - \gamma) - \pi/2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для замкнених поверхонь, показаних на рисунку пунктирними лініями, згідно з принципом неперервності силових ліній маємо рівняння

$$-(B_c + dB_c)l_c h_c k_c + B_c l_c h_c k_c + Bl_\delta R_\delta d\alpha = 0;$$

$$-(B_p + dB_p)l_p h_p k_p + B_p l_p h_p k_p - Bl_\delta R_\delta d\alpha = 0,$$

де $l_c, l_p, h_c, h_p, k_c, k_p$ – відповідно, довжини, висоти та коефіцієнти заповнення ярем статора і ротора; l_δ – розрахункова довжина якоря. З цих рівнянь впливають диференціальні рівняння

$$dB_c / d\alpha = c_c B; \quad (9)$$

$$dB_p / d\alpha = -c_p B, \quad (10)$$

де $c_c = l_\delta R_\delta / (l_c h_c k_c)$; $c_p = l_\delta R_\delta / (l_p h_p k_p)$.

Отже,

$$B_c / c_c = \int_0^\alpha B d\alpha + B_{c0} / c_c; \quad B_p / c_p = -\int_0^\alpha B d\alpha + B_{p0} / c_p,$$

де B_{c0}, B_{p0} – значення індукцій B_c, B_p при $\alpha = 0$. Додавши ці рівності, отримаємо

$$B_p = B_0 - cB_c, \quad (11)$$

де $c = l_c h_c k_c / (l_p h_p k_p)$, $B_0 = B_{p0} + cB_{c0}$.

Згідно з законом повного струму для контуру інтегрування, суміщеного з колом радіуса R_c , маємо інтегральне рівняння

$$\int_0^{2\pi} H_c d\alpha = 0. \quad (12)$$

Система рівнянь (4)–(9), (11), (12) разом з граничними умовами

$$B[\alpha] = B[\alpha + 2\pi]; \quad B_c[\alpha] = B_c[\alpha + 2\pi]; \quad B_p[\alpha] = B_p[\alpha + 2\pi] \quad (13)$$

відображає континуальну крайову задачу розрахунку робочого магнітного поля генератора за заданих струмів контурів і кута γ .

Виведемо аналітичні вирази для потокозчеплень контурів. Приріст робочого потокозчеплення j -го контуру на його ділянці, що відповідає провідникам, розташованим на інтервалі $d\alpha$,

$$d\psi_{ij} = l_\delta A n_j d\alpha,$$

де A – векторний магнетний потенціал, пов'язаний з індукцією в проміжку рівнянням

$$B = dA / d\alpha (1 / R_\delta).$$

З цього рівняння з урахуванням (9) маємо

$$dA / d\alpha = R_\delta / c_c \cdot dB_c / d\alpha$$

і, відповідно,

$$\int_0^\alpha dA / d\alpha d\alpha = R_\delta / c_c \int_0^\alpha dB_c / d\alpha d\alpha.$$

Виконаємо інтегрування: тоді $A - A_0 = (B_c - B_{c0})R_c / c_c$. Векторний потенціал визначимо з точністю до сталої, тому, не втрачаючи загальності, можна прийняти, що $A_0 = B_{c0}R_c / c_c$. Тоді робоче поткозчеплення j -го електричного контуру

$$\psi_{ij} = l_\delta R_\delta / c_c \int_0^{2\pi} B_c n_j d\alpha = c_\psi \int_0^{2\pi} B_c n_j d\alpha, \quad (14)$$

де $c_\psi = l_\delta R_\delta / c_c = l_c h_c k_c$.

З урахуванням прийнятих допущень і формули (14) маємо такі вирази для повних потокозчеплень контурів:

$$\begin{aligned}\psi_a &= L_{saa}i_a + L_{sab}i_b + L_{sac}i_c + c_a \int_0^{2\pi} B_c \sin p\alpha d\alpha; \\ \psi_b &= L_{sba}i_a + L_{sbb}i_b + L_{sbc}i_c + c_b \int_0^{2\pi} B_c \sin(p\alpha - 2\pi/3) d\alpha; \\ \psi_c &= L_{sca}i_a + L_{scb}i_b + L_{scc}i_c + c_c \int_0^{2\pi} B_c \sin(p\alpha + 2\pi/3) d\alpha; \\ \psi_f &= L_{sff}i_f + L_{sfd}i_d + c_f \int_0^{2\pi} B_c \sin p(\alpha - \gamma) d\alpha; \\ \psi_d &= L_{sdf}i_f + L_{sdd}i_d + c_d \int_0^{2\pi} B_c \sin p(\alpha - \gamma) d\alpha; \\ \psi_q &= L_{sqq}i_q + c_q \int_0^{2\pi} B_c \sin(p(\alpha - \gamma) - \pi/2) d\alpha,\end{aligned}\tag{15}$$

де $c_j = N_j c_\psi = 2w_j l_c h_c k_c / \pi$; L_{sjk} ($j, k = a, b, c, f, d, q$) – сталі індуктивності розсіяння.

Рівняння електричного та механічного стану. Згідно з другим законом Кірхгофа рівняння електричного стану генератора мають вигляд

$$\begin{aligned}d\psi_a / dt + r_a i_a - u_a[t] &= 0; & d\psi_b / dt + r_b i_b - u_b[t] &= 0; & d\psi_c / dt + r_c i_c - u_c[t] &= 0; \\ d\psi_f / dt + r_f i_f - u_f[t] &= 0; & d\psi_d / dt + r_d i_d &= 0; & d\psi_q / dt + r_q i_q &= 0,\end{aligned}$$

або, у векторному записі,

$$d\Psi / dt + \mathbf{r}\mathbf{i} - \mathbf{u}[t] = 0,\tag{16}$$

де $\Psi = (\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_f, \psi_d, \psi_q)$ – вектор-стовпець потокозчеплень контурів статора та ротора; $\mathbf{r} = \text{diag}(r_a, r_b, r_c, r_f, r_d, r_q)$ – матриця активних опорів контурів; $\mathbf{i} = (i_a, i_b, i_c, i_f, i_d, i_q)_t$ – вектор-стовпець струмів контурів; $\mathbf{u}[t] = (u_a[t], u_b[t], u_c[t], u_f[t], 0, 0)_t$ – вектор-стовпець напруг живлення як задана функція часу.

Рівняння механічного стану має вигляд

$$d\omega / dt - J^{-1}(M + M_b[t]) = 0,\tag{17}$$

де

$$\omega = d\gamma / dt \quad (18)$$

– кутова швидкість обертання ротора; J – момент інерції обертових частин; $M_b[t]$ – момент на валу як задана функція часу; M – електромагнітний момент, визначений за формулою

$$M = -R_\delta l_\delta \int_0^{2\pi} (i_a N_a \sin p\alpha + i_b N_b \sin(p\alpha - 2\pi/3)) B d\alpha - \\ - R_\delta l_\delta \int_0^{2\pi} i_c N_c \sin(p\alpha + 2\pi/3) B d\alpha. \quad (19)$$

Крайова задача розрахунку перехідних процесів. Математична модель електромеханічних процесів неявнополосного синхронного генератора з урахуванням ексцентриситету складається умовно з таких частин:

а) крайова задача розрахунку магнітного поля, представлена системою рівнянь (4)–(9), (11), (12), (13), (15);

б) система рівнянь електричного та механічного стану (16)–(19);

в) початкові умови

$$i_j[t=0] = i_{j0} \quad (j = a, b, c, f, d, q); \quad \gamma[t=0] = \gamma_0; \quad \omega[t=0] = \omega_0. \quad (20)$$

Розв'язання сформульованої задачі складається з таких етапів:

а) формування неявної електромагнітної характеристики [1] шляхом алгебризації просторових диференціальних рівнянь (8), (9) та інтегральних рівнянь (12), (15);

б) застосування неявного методу чисельного інтегрування з використанням формул диференціювання назад g -го порядку [2].

Ці етапи розв'язування, а також аналіз результатів розрахунку плануємо викласти в ч. 2 запропонованої статті.

1. Фільц Р.В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. К.: Наук. думка, 1979. 205 с.
2. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных систем. М.: Энергия, 1980. 638 с.

**MATHEMATICAL MODEL OF ELECTROMECHANICAL PHENOMENA
IN A SYNCHRONOUS NON-SALIENT POLE GENERATOR
WITH RESPECT TO ECCENTRICITY. PART 1**

M. Kotsyuba, R. File

Lviv Polytechnic National University
12 S. Bandery Street, Lviv 79013, Ukraine
arichka2002@yahoo.com

A mathematical model for calculating transient phenomena in a 3-phase synchronous non-salient pole generator having three rotor contours with respect to eccentricity and an alternating saturation of the magnetic circuit has been introduced. Non-linearity of electromagnetic relations has been considered. A unique system of integral-differential equations describing electrical, magnetic, and mechanical conditions has been formed. The distribution of magnetic field has been computed by means of grid-point method applied to magnetostatic equations in one-dimensional application. A solution has been obtained using an implicit procedure of integration.

Key words: non-salient pole generator, eccentricity, alternating saturation, non-linearity.

Стаття надійшла до редколегії 01.04.2004
Прийнята до друку 04.06.2004