

УДК 621.372

ВИЗНАЧЕННЯ ВЗАЄМНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ПІДСХЕМ ТА ЇХНІЙ ВПЛИВ НА СТІЙКІСТЬ МЕТОДУ РОЗДІЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

С. Рендзіняк

*Національний університет „Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна*

На прикладі RC -ланок описано організацію взаємних зв'язків підсхем методу роздільного інтегрування за допомогою ідеальних джерел енергії, реальних джерел енергії та джерел з додатковими реактивними елементами. Визначено найбільші значення кроку інтегрування підсхем у кожному наведеному випадку. З'ясовано, що застосування додаткових реактивних елементів принципово вирішує проблему обмеження кроку інтегрування підсхем явно-неявних різницевих обчислювальних схем. Отримані результати підтверджено прикладами розрахунку схем певними методами інтегрування підсхем.

Ключові слова: підсхема, метод роздільного інтегрування, взаємні зв'язки підсхем, стійкість обчислювального процесу.

Метод роздільного інтегрування підсхем (multirate method), як будь-який метод з явними складовими в різницевій схемі, має певні обмеження кроку інтегрування. Ці складові за умови застосування неявних методів розв'язку саме підсхем повністю залежать від типу зв'язків між ними. Найпростіше устанавлюються зв'язки між зовнішніми напругами і струмами підсхем за допомогою додаткових ідеальних джерел енергії, однак тоді не враховуються інерційні особливості сусідніх підсхем, що відразу приводить до обмеження кроку інтегрування підсхем. Дещо пом'якшує цю умову врахування внутрішніх опорів сусідніх підсхем за допомогою реальних джерел енергії [1]. Принципово вирішує цю проблему врахування динамічних властивостей сусідніх підсхем уведення в реальне джерело реактивного елемента [2, 4], параметри якого визначені в момент узгодження підсхем.

Типи зв'язків підсхем. Розглянемо особливості формування зв'язків підсхем методу роздільного інтегрування на класичному прикладі RC -ланок (рис. 1).

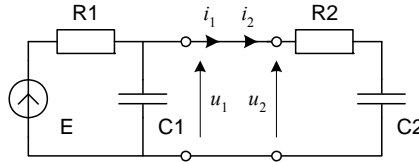


Рис. 1. RC-ланка : ціла схема.

Система диференціальних рівнянь такої схеми набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_{C1} \\ \dot{i}_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 - G_2 & G_2 \\ G_2 & -G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Для скорочення записів у подальшому визначимо всі сталі часу через $\tau_1 = R_1 C_1$; $\tau_2 = R_2 C_2 = \frac{\tau_1}{s}$, $\tau_{12} = R_2 C_1 = \frac{\tau_1}{k}$, де коефіцієнти $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\tau_1}{\tau_{12}}$, $s = \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$, $\frac{s}{k} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\tau_{12}}{\tau_2} = \frac{\tau_1}{k \tau_2}$ дорівнюють відношенню відповідних параметрів елементів електричного кола. Тоді запишемо систему рівнянь стану (1) у компактному вигляді

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}} & \frac{1}{\tau_{12}} \\ \frac{1}{\tau_2} & -\frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 - k & k \\ s & -s \end{pmatrix}$ – матриця цілої схеми.

Зв'язок підсхем ідеальними джерелами енергії. Поділ схеми на дві частини (рис. 2) приводить до розподілу складових матриці \mathbf{A} між змінними стану підсхем u_{C1} , u_{C2} та зовнішніми вхідними змінними, наприклад, $i_1 = FJ$, $u_2 = FE$:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Вихідні зовнішні змінні визначимо з рівнянь

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Налагодимо також зв'язок вхідних змінних з вихідними

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

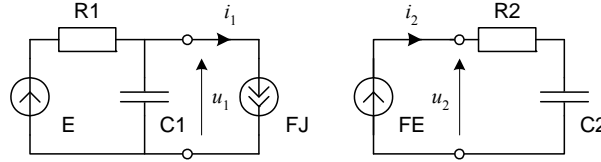


Рис. 2. RC-ланка: дві підсхеми.

Тепер розв'яжемо вихідні рівняння (4) та рівняння зв'язку (5) відносно вхідних зовнішніх змінних i_1, u_2

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 & -G_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix}.$$

Підставимо отриманий результат у систему рівнянь (3) й отримаємо складові матриці $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$, де $\mathbf{P} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -k & k \\ s & 0 \end{pmatrix}$, які в різницевій обчислювальній схемі визначають, відповідно, неявну і явну складові.

З достатньої і необхідної умови стійкості різницевої схеми, а саме з умови розміщення власних значень перехідної матриці різницевої обчислювальній схемі

$$\mathbf{L} = (\mathbf{1} - h\mathbf{b}_{-1}\mathbf{P})^{-1} (\mathbf{1} + h\mathbf{b}_0\mathbf{P} + h(\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{b}_0)\mathbf{Q}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + b_{-1} \frac{h}{\tau_1} & 0 \\ 0 & 1 + b_{-1}s \frac{h}{\tau_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - b_0 \frac{h}{\tau_1} - (b_{-1} + b_0)k \frac{h}{\tau_1} & (b_{-1} + b_0)k \frac{h}{\tau_1} \\ (b_{-1} + b_0)s \frac{h}{\tau_1} & 1 - b_0s \frac{h}{\tau_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$$

деякого методу інтегрування підсхем (наприклад, неявного методу Ейлера, якщо $b_{-1} = 1$, $b_0 = 0$, чи методу трапецій, якщо $b_{-1} = b_0 = 1/2$, чи явного методу Ейлера, якщо $b_{-1} = 0$, $b_0 = 1$) у межах одиничного кола $|l| < 1$, визначимо найбільше значення кроку інтегрування підсхем. У цьому випадку власні значення обчислюють відомим способом:

$$l_{1,2} = \frac{l_{11} + l_{22} \pm \sqrt{(l_{11} - l_{22})^2 + 4l_{12}l_{21}}}{2}.$$

Виконаємо необхідні перетворення й отримаємо такі умови для:

а) неявного методу Ейлера

$$\frac{h}{\tau_1} < \frac{4}{-(1-k+s) + \sqrt{(1-k+s)^2 + 4(2k-1)s}} = \frac{1-k+s + \sqrt{(1-k+s)^2 + 4(2k-1)s}}{(2k-1)s};$$

б) методу трапецій

$$\frac{h}{\tau_1} < 4/k \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{s}{k}} \right) = \frac{1}{s} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{s}{k}} - 1 \right);$$

в) явного методу Ейлера

$$\frac{h}{\tau_1} < \frac{4}{1 + k + s + \sqrt{(1 + k + s)^2 - 4s}} = \frac{1 + k + s - \sqrt{(1 + k + s)^2 - 4s}}{s}.$$

Цікавий результат, коли підсхеми інтегрують неявним методом Ейлера. Якщо знаменник $2k - 1$ від'ємний, то крок інтегрування взагалі необмежений. Це можна спостерігати за умови $k < 1/2$ або $R_2 > 2R_1$ з будь-якими значеннями параметрів конденсаторів C_1 і C_2 .

Зв'язок підсхем реальними джерелами енергії. Додаткові джерела енергії, приєднані до певної підсхеми, замінюють інші підсхеми. Тобто ці джерела є не що інше, як елементи заступних схем інших підсхем зі сторони відповідної пари полюсів. Очевидно, що чим ліпше відповідають ці заступні схеми тим підсхемам, які вони замінюють, тим меншим повинно бути обмеження кроку інтегрування.

Спочатку введемо в модель джерела додатковий опір, який відповідає внутрішнім опорам підсхем зі сторони відповідної пари полюсів (рис. 3).

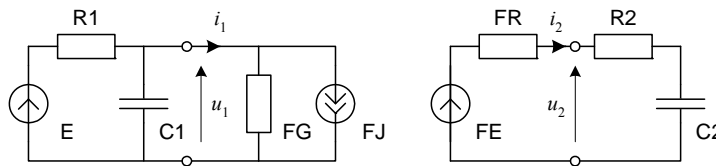


Рис. 3. RC-ланка: дві підсхеми з реальними джерелами енергії.

Цю схему також описує система диференціальних рівнянь (3), однак зовнішні вхідні змінні набувають значення

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FJ \\ FE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} FG & 0 \\ 0 & -FR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Вихідні рівняння (4) залишаються без змін і разом з (5) та (6) дають таку залежність:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FG & 0 \\ 0 & -\frac{FR}{R_2 + FR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{R_2 + FR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FJ \\ FE \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Отже, система диференціальних рівнянь підсхем набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 - R_1 FG & 0 \\ 0 & -s - \frac{sFR}{R_2 + FR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & \frac{sR_2}{R_2 + FR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FJ \\ FE \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Порівняємо отриману систему з системою рівнянь повної схеми (2), і зробимо висновок, що діагональні елементи основних матриць цих систем однакові за умови $FG = G_2$, $FR = 0$. Саме такі значення опорів відповідають внутрішнім опорам підсхем. Тоді отримуємо систему

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 - k & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FJ \\ FE \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

у якій перша складова правої частини визначає неявну компоненту методу роздільного інтегрування підсхем, а друга – явну.

Тепер визначимо зв'язок параметрів джерел FJ , FE зі змінними стану через рівняння зв'язку підсхем (5), розв'язавши відносно них рівняння (6) і (7),

$$\begin{pmatrix} FJ \\ FE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 - FG & -G_2 \\ 1 + G_2 FR & -G_2 FR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -G_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix}.$$

Підставимо отриману залежність у (8) й одержимо систему

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \mathbf{P} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 - k & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} 0 & k \\ s & 0 \end{pmatrix},$$

з якої визначимо перехідну матрицю різничевої обчислювальної схеми

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{1} - hb_{-1}\mathbf{P})^{-1} (\mathbf{1} + hb_0\mathbf{P} + h(b_{-1} + b_0)\mathbf{Q}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + b_{-1}(1+k)\frac{h}{\tau_1} & 0 \\ 0 & 1 + b_{-1}s\frac{h}{\tau_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - b_0(1+k)\frac{h}{\tau_1} & (b_{-1} + b_0)k\frac{h}{\tau_1} \\ (b_{-1} + b_0)s\frac{h}{\tau_1} & 1 - b_0s\frac{h}{\tau_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, найбільше значення кроку інтегрування підсхем набуває таких значень

а) для неявного методу Ейлера $\frac{h}{\tau_1} < \infty$;

б) для методу трапецій $\frac{h}{\tau_1} < \frac{2}{\sqrt{ks}}$;

в) для явного методу Ейлера збігається зі значенням, отриманим у п. 2.

Зв'язок підсхем реальними джерелами енергії та реактивними елементами. Динамічні властивості сусідніх підсхем частково можна врахувати введенням у заступну схему реактивних елементів. Найоптимальніший варіант сполучення елементів, що не зумовлює топологічних вироджень, запропоновано в праці [4] і показано на рис. 4. У цьому випадку першу підсхему описує система диференціальних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{i}_{FL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 - FG & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ i_{FL} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 E \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} FJ,$$

другу підсхему –

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_{FC} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2 + FR} & -\frac{1}{R_2 + FR} \\ -\frac{1}{R_2 + FR} & -\frac{1}{R_2 + FR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{FC} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2 + FR} \\ \frac{1}{R_2 + FR} \end{pmatrix} FE.$$

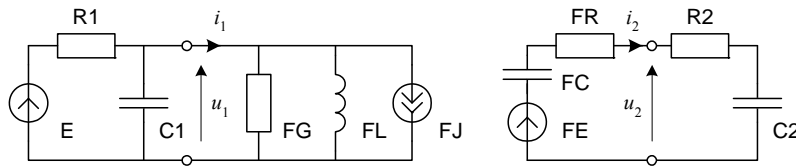


Рис. 4. RC-ланка: дві підсхеми з реальними джерелами енергії та реактивними елементами.

Після заміни сталих часу й упорядкування системи диференціальних рівнянь підсхем набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{i}_{FL} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 - R_1 FG & -R_1 \\ \frac{\tau_1}{FL} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ i_{FL} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -R_1 \\ 0 \end{pmatrix} FJ; \quad (9a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{FC} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -\frac{kR_2 C_1}{FC(R_2 + FR)} & -\frac{kR_2 C_1}{FC(R_2 + FR)} \\ -\frac{sR_2}{R_2 + FR} & -\frac{sR_2}{R_2 + FR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{FC} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} \frac{kR_2 C_1}{FC(R_2 + FR)} \\ \frac{sR_2}{R_2 + FR} \end{pmatrix} FE. \quad (9b)$$

На відміну від рівнянь (6), з'являється складова, залежна від змінних стану додаткових реактивних елементів,

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{FL} \\ u_{FC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} FJ \\ FE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} FG & 0 \\ 0 & -FR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Тепер визначимо зв'язок параметрів джерел FJ , FE зі змінними стану через рівняння зв'язку підсхем (5), розв'язавши відносно них рівняння (10) і вихідні рівняння (4)

$$\begin{pmatrix} FJ \\ FE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 - FG & -G_2 \\ 1 + G_2 FR & -G_2 FR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{FL} \\ u_{FC} \end{pmatrix}.$$

Підставимо отриману залежність у систему рівнянь підсхем (9)

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{i}_{FL} \\ \dot{u}_{FC} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 - R_1 FG & -R_1 & & 0 \\ \tau_1 & 0 & & \\ \hline & & -\frac{kR_2 C_1}{FC(R_2 + FR)} & -\frac{kR_2 C_1}{FC(R_2 + FR)} \\ 0 & & -\frac{sR_2}{R_2 + FR} & -\frac{sR_2}{R_2 + FR} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_{C1} \\ i_{FL} \\ u_{FC} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -R_1(G_2 - FG) & R_1 & 0 & R_1 G_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{kR_2 C_1(1 + G_2 FR)}{FC(R_2 + FR)} & 0 & \frac{kR_2 C_1}{FC(R_2 + FR)} & -\frac{kR_2 C_1 G_2 FR}{FC(R_2 + FR)} \\ \frac{sR_2(1 + G_2 FR)}{R_2 + FR} & 0 & \frac{sR_2}{R_2 + FR} & -\frac{sR_2 G_2 FR}{R_2 + FR} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_{C1} \\ i_{FL} \\ u_{FC} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мета цих математичних операцій полягає в тому, щоб отримати систему рівнянь блоково-діагональної структури, у якій діагональні блоки першої складової (неявної компоненти) якнайліпше відповідали основній матриці системи рівнянь цілої схеми (2). Цього можна досягти за умов $FG = G_2$, $FR = 0$, $FL = -\frac{C_2}{G_2^2}$;

$FC = C_1$. Тоді після необхідного упорядкування отримаємо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{C1} \\ R_2 \dot{i}_{FL} \\ \dot{u}_{FC} \\ \dot{u}_{C2} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ R_2 i_{FL} \\ u_{FC} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ R_2 i_{FL} \\ u_{FC} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де матриця $\mathbf{P} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} -1-k & -k & | & 0 \\ -s & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & & | & -k & -k \\ & & | & -s & -s \end{pmatrix}$ визначає неявну, а матриця $\mathbf{Q} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} 0 & k & | & 0 & k \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline k & 0 & | & k & 0 \\ s & 0 & | & s & 0 \end{pmatrix}$

– явну компоненту. Перехідна матриця різницевої обчислювальної схеми тоді матиме вигляд

$$\mathbf{L} = (\mathbf{I} - hb_{-1}\mathbf{P})^{-1} (\mathbf{I} + hb_0\mathbf{P} + h(b_{-1} + b_0)\mathbf{Q}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{hb_{-1}}{\tau_1}(1+k) & \frac{hb_{-1}}{\tau_1}k & | & 0 \\ \frac{hb_{-1}}{\tau_1}s & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & & | & 1 + \frac{hb_{-1}}{\tau_1}k & \frac{hb_{-1}}{\tau_1}k \\ & & | & \frac{hb_{-1}}{\tau_1}s & 1 + \frac{hb_{-1}}{\tau_1}s \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 - \frac{hb_0}{\tau_1}(1+k) & \frac{hb_{-1}}{\tau_1}k & | & 0 & \frac{h(b_{-1} + b_0)}{\tau_1}k \\ -\frac{hb_0}{\tau_1}s & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline \frac{h(b_{-1} + b_0)}{\tau_1}k & 0 & | & 1 + \frac{hb_{-1}}{\tau_1}k & -\frac{hb_0}{\tau_1}k \\ \frac{h(b_{-1} + b_0)}{\tau_1}s & 0 & | & \frac{hb_{-1}}{\tau_1}s & 1 - \frac{hb_0}{\tau_1}s \end{pmatrix}$$

Аналітичне знаходження виразів власних значень матриці четвертого порядку зумовлює певні труднощі. Однак перевірка відомими обчислювальними засобами, наприклад, програмним комплексом MatLab, підтвердила гіпотезу про розміщення власних значень перехідної матриці в межах одиничного кола за будь-яких значень кроку h , коефіцієнтів k та s , тобто про відсутність обмежень кроку інтегрування підсхем неявним методом Ейлера і методом трапецій.

Приклади розрахунку перехідного процесу. Відлагодження і перевірку зв'язків підсхем виконано під час розрахунку RC -ланки з наступними параметрами елементів програмним комплексом [3].

Серед багатьох варіантів значень коефіцієнтів k та s наведемо найхарактерніші:

- $k = 4, s = 1/2, k = 8s$, тобто $R_1 = 4 R_2, 8 C_1 = C_2, \tau_1 = 10$ мс (табл. 1, рис. 5–9);
- $k = 1/4, s = 2, 8k = s$, тобто $4 R_1 = R_2, C_1 = 8 C_2, \tau_1 = 10$ мс (табл. 2).

Таблиця 1

Найбільше значення відносного кроку h/τ_1 ($k = 4, s = 1/2$)

Метод	Ідеальні джерела енергії	Реальні джерела енергії	Джерела енергії з реактивними елементами
Неявний Ейлера	$\frac{4}{7} \approx 0.571$ (рис. 5)	∞ (рис. 8)	
Трапецій	$\frac{2}{\sqrt{6}+2} = \sqrt{6}-2 \approx 0.449$ (рис. 6)	$\sqrt{2} \approx 1.414$ (рис. 9)	∞
Явний Ейлера	$\frac{8}{11+\sqrt{113}} = 11-\sqrt{113} \approx 0.370$ (рис. 7)		

Таблиця 2

Найбільше значення відносного кроку h/τ_1 ($k = 1/4, s = 2$)

Метод	Ідеальні джерела енергії	Реальні джерела енергії	Джерела енергії з реактивними елементами
Неявний Ейлера	∞		
Трапецій	$\frac{16}{\sqrt{33}+1} = \frac{\sqrt{33}-1}{2} \approx 2.372$	$2\sqrt{2} \approx 2.828$	∞
Явний Ейлера	$\frac{16}{13+\sqrt{41}} \approx 0.825$		

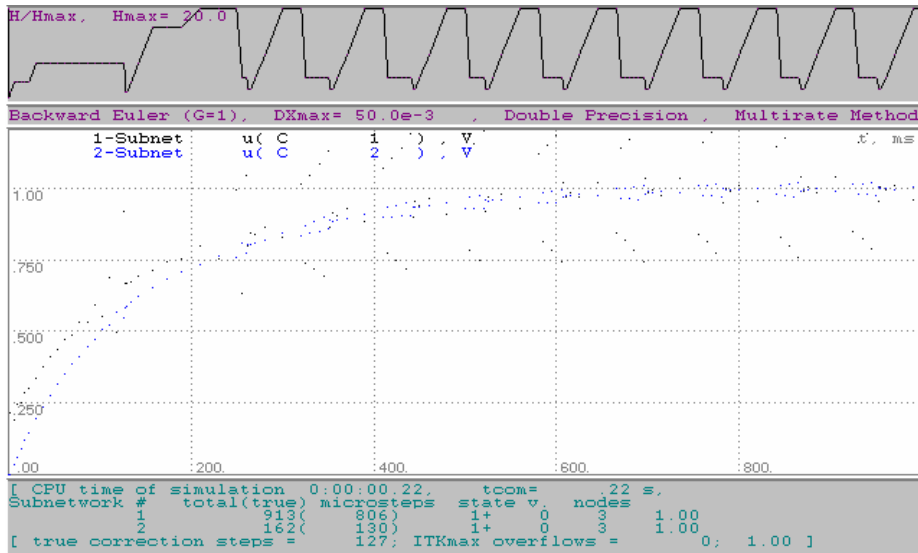


Рис. 5. RC-ланка ($k = 4, s = 1/2, k = 8s$, тобто $R_1 = 4 R_2, 8 C_1 = C_2$) з ідеальними джерелами зв'язку; неявний метод Ейлера, $h < 5.71$ мс.

Параметри інтегрування програмного комплексу підбрано так, щоби автоматично обраний крок інтегрування не залежав від точності розрахунків перехідного процесу, а лише від якісного його проходження. Крок може зменшити тільки „вибух” змінних стану. Діаграму зміни кроку інтегрування під час перехідного процесу відносно заданої величини H_{max} показано в першому вікні рис. 5–9.

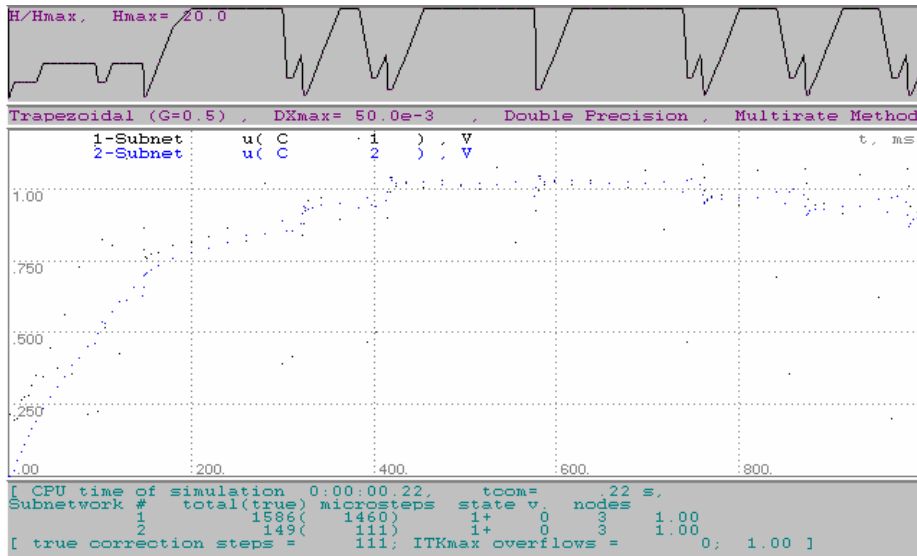


Рис. 6. RC-ланка ($k = 4, s = 1/2, k = 8s$, тобто $R_1 = 4 R_2, 8 C_1 = C_2$) з ідеальними джерелами зв'язку; метод трапецій, $h < 4.49$ мс.

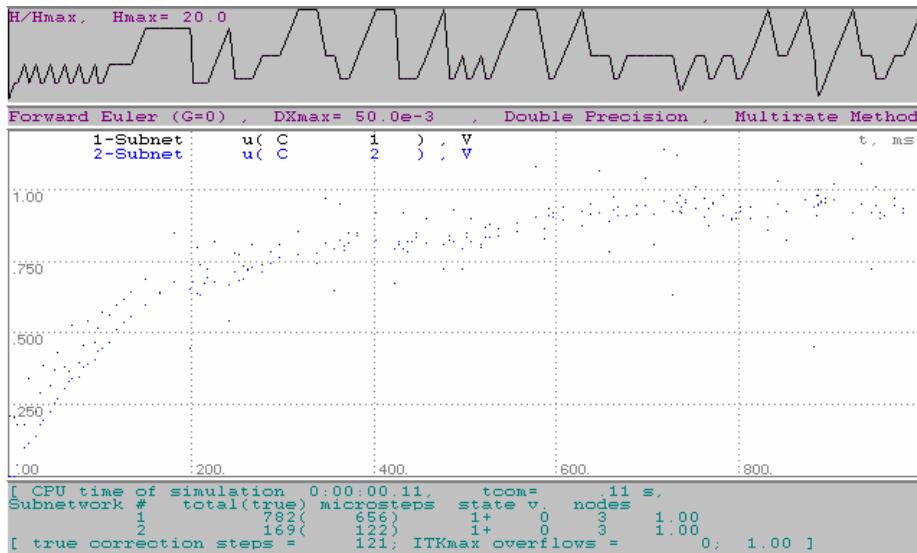


Рис. 7. RC-ланка ($k = 4, s = 1/2, k = 8s$, тобто $R_1 = 4 R_2, 8 C_1 = C_2$) з ідеальними джерелами зв'язку; явний метод Ейлера, $h < 3.70$ мс.

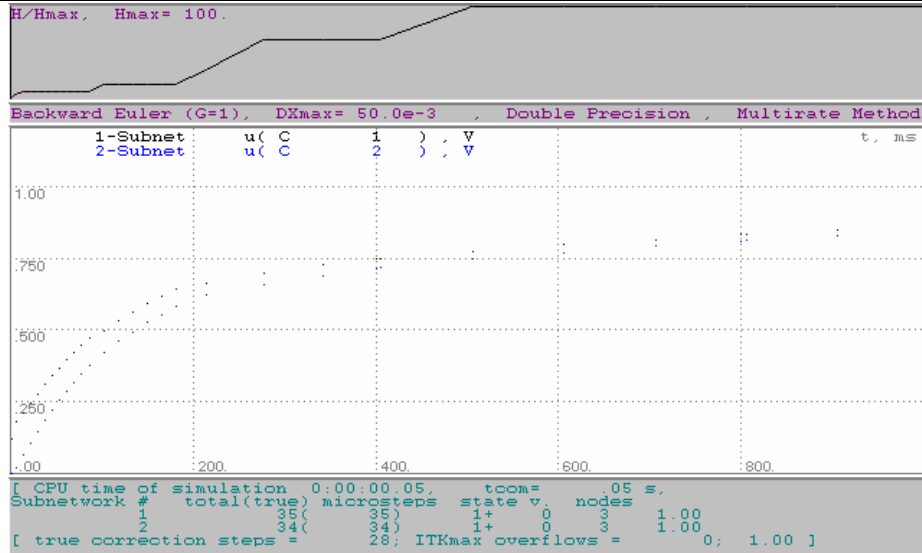


Рис. 8. RC -ланка ($k = 4$, $s = 1/2$, $k = 8s$, тобто $R_1 = 4 R_2$, $8 C_1 = C_2$) з реальними джерелами зв'язку; неявний метод Ейлера, $h < \infty$.

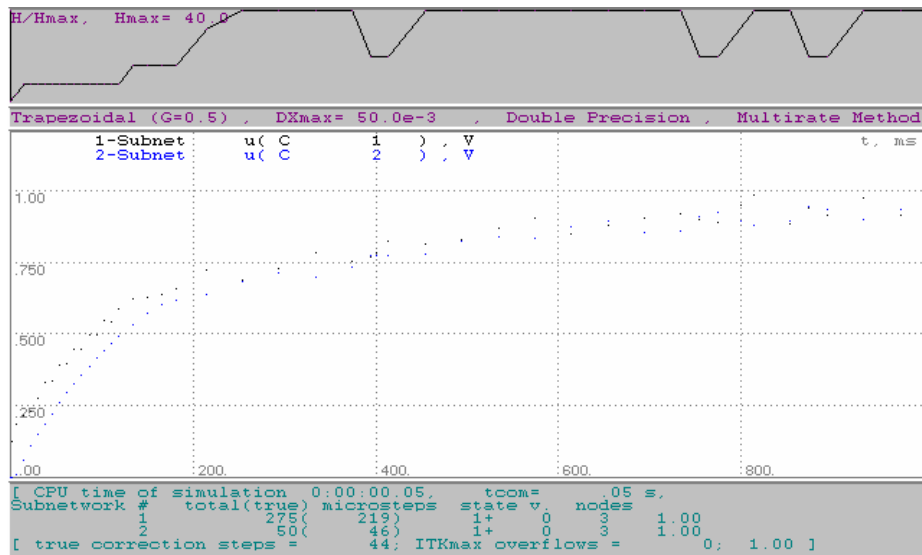


Рис. 9. RC -ланка ($k = 4$, $s = 1/2$, $k = 8s$, тобто $R_1 = 4 R_2$, $8 C_1 = C_2$) з реальними джерелами зв'язку; метод трапецій, $h < 14.14$ мс.

Отже, проблема стійкості суттєво обмежує сферу застосування методу роздільного інтегрування підсхем. Особливо це стосується сильно зв'язаних підсхем. До них належать також, що здається парадоксальним, і RC -ланки. Саме на прикладі цих ланок вдалося вирішити проблему стійкості введенням додаткових реактивних елементів у заступні схеми, які замінюють сусідні підсхеми. Наведену

методику нескладно застосувати й для нелінійних схем, що відкриває перспективу в подальших дослідженнях.

1. Рендзіняк С.Й. Учет внутренних сопротивлений подсхем при анализе динамических режимов сложных нелинейных схем диакоптическими методами // Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. III Всесоюз. науч.-техн. конф. К.: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1988. Ч. 2. С.189–191.
2. Рендзіняк С.Й. Критерії вибору топології реактивних зв'язків між підсхемами // Теор. електротехніка. 2002, Вип. 56. С.10–12.
3. Рендзіняк С.Й. Навчальні аспекти дослідження динамічних режимів електротехнічних кіл методом підсхем // Доп. спільної укр.-пол. школи-семінару “Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика”: Соліна, 10–13 вересня 2000 р., Warsaw, 2000 р. С. 53–56.
4. Стахів П.Г., Рендзіняк С.Й. Врахування взаємного динамічного впливу підсхем в діакоптичних релаксаційних методах розрахунку багатofункціональних систем // Електроніка и связь: Міжнар. наук.-техн. конф. “Проблеми фізичної та біомедичної електроніки”. К., 8–10 червня 1999 р. № 6, Т. 2. С. 201–205.

INFLUENCE OF INTERACTION BETWEEN SUBCIRCUITS TO STABILITY OF TRANSIENT SIMULATION BY MULTIRATE METHOD

S.Rendzinyak

*Lviv Polytechnic National University,
St. Bandera Str. 12, UA-79013 Lviv, Ukraine*

Subcircuit relationships architecture of a multirate method of transient simulation with the help of ideal power sources, and real power sources and sources with additional wattless components on an example of RC ladder is shown. The maximum values of a subcircuit integration step in each case are determined. It is shown, that usage of additional wattless components helps essentially to solve a restriction problem of subcircuit integration step by explicit–implicit difference computing scheme. The obtained results are confirmed by examples of the circuits calculation by some integration methods.

Key words: subcircuit, multirate method, dynamic interaction between subcircuits, stability of transient simulation.

Стаття надійшла до редколегії 02.11.2003

Прийнята до друку 04.06.2004