ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2004. Вип.57. С.31-37 *2004. Is.57. P.31–37*

УДК 621.373

РЕГУЛЯРИЗОВАНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОГНОСТИЧНИХ МАКРОМОДЕЛЕЙ

Я. Матвійчук, В. Паучок

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Для параметричної ідентифікації автономної макромоделі у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь застосовано метод регуляризації на основі редукції апроксимаційного базису та методу Тіхонова. Регуляризовано також числове диференціювання. Отримано стійкі моделі, придатні для побудови довготривалих прогнозів.

Ключові слова: макромодель, ідентифікація, регуляризація, прогноз.

Розробка обчислювально стійких алгоритмів прогностичного моделювання відкриває шлях до впровадження нових інформаційних технологій. Наше завдання: експериментально дослідити особливості регуляризованих алгоритмів параметричної ідентифікації автономної динамічної макромоделі зі структурою, що задана системою звичайних диференціальних рівнянь; запропонувати методи побудови довготривалих екстраполяційних розв'язків; застосувати їх до задач фізико-технічного моделювання, економічного планування та соціального будівництва.

Нехай задано залежність деякої величини від часу у вигляді дискретної послідовності:

$$y(t_i);\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (1)$$

Таку залежність можна відобразити розв'язком макромоделі зі структурою, що задана системою звичайних диференціальних рівнянь [2]:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \sum\limits_{i_0,\ldots,i_n=0}^{r} c_{i_0\ldots i_3} y_0^{i_0} \ldots y_n^{i_n}; \qquad i_0+\ldots+i_n \le r; \end{cases} \qquad (2)$$

де $y_0(t_i) \approx y(t_i)$, $i = 2,\ldots,m$ – моделювальна функція; $y_j(t_1) = y^{(j)}(t_1)$, $j = 0,\ldots,n$ – початкові умови.

Структура (2) успішно застосована для моделювання випадкових процесів [2, 3], радіоелектронних систем [2, 4], прогнозування економічних величин [4, 5].

Параметрична ідентифікація структури (2) полягає в обчисленні n+1 похідних дискретної залежності (1)

$$y_j(t_i) = \left. {d^j y(t)}\Big/{dt^j} \right|_{t=t_i}; \; i = \overline{1,m}; \;\; j = \overline{0,n+1}; \tag{3}$$

та визначенні вектора коефіцієнтів апроксимації $\bar{c}$ з лінійної задачі мінімізації:

$$\min_{\bar{c}} \sum_{i=1}^{m} \left(\dot{y}_n(t_i) - \sum_{i_0,\dots,i_n=0}^{r} c_{i_0,\dots,i_n} y_0^{i_0}(t_i) \cdot \ldots \cdot y_n^{i_n}(t_i) \right)^2 . \tag{4}$$

Задачі (3) та (4) суттєво некоректні в сенсі Адамара, причому результати першої задачі слугують початковими даними для другої.

Розглянемо спочатку некоректність задачі (4). Класичний метод її регуляризації полягає у мінімізації регуляризаційного функціонала Тіхонова [6]:

$$\min_{\bar{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\dot{y}_n(t_i) - \sum_{i_0,\dots,i_n=0}^{r} c_{i_0,\dots,i_n} y_0^{i_0}(t_i) \cdot \ldots \cdot y_n^{i_n}(t_i) \right)^2 + \alpha \sum_{i_0\dots i_n=0}^{r} c_{i_0\dots i_n}^2 \right), \tag{5}$$

де $\alpha>0$ – параметр регуляризації, який можна підбирати емпірично.

Однак вектор коефіцієнтів $\bar{c}$ з (5) далеко не завжди забезпечує бажану якість макромоделі (2). Тому розроблено метод додаткової регуляризації задачі (5), названий методом комбінованої редукції [1]. Він полягає у виявленні та видаленні "зайвих" доданків апроксимаційного степеневого полінома

$$\sum_{i_0,\dots,i_n=0}^{r} c_{i_0\dots i_3} y_0^{i_0} \dots y_n^{i_n} . \tag{6}$$

Для цього у задану множину значень (3) вносять малі випадкові збурення, двічі розв'язують задачу (5) без збурень і зі збуреннями та видаляють той доданок полінома (6), коефіцієнт якого отримав унаслідок збурень найбільше відносне відхилення:

$$\delta_i = \left| (\hat{c}_i - c_i)/\hat{c}_i \right| ; \tag{7}$$

де $\hat{c}_i$, c_i – коефіцієнти апроксимації збуреної та незбуреної задач (5).

Багаторазове повторення процедури редукції зменшує розмірність L вектора коефіцієнтів та може значно поліпшити якість макромоделі (2) в сенсі відтворення заданої залежності (1).

Для вдосконалення методів регуляризованої ідентифікації моделі (2) виконано дослідження залежності від параметра регуляризації α функціонала Тіхонова

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} \left(\dot{y}_n(t_i) - \sum_{i_0,\dots,i_n=0}^{r} c_{i_0\dots i_n} y_0^{i_0}(t_i) \cdot \ldots \cdot y_n^{i_n}(t_i) \right)^2 + \alpha \sum_{i_0,\dots,i_n=0}^{r} c_{i_0\dots i_n}^2 , \tag{8}$$

його регуляризаційного доданка

$$\gamma(\alpha) = \alpha \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{r} c_{i_1\dots i_n}^2 ; \quad i_1 + \dots + i_n \le r , \tag{9}$$

та відхилення модельованого вектора (1),(3) $\bar{y} = (y_0,\dots,y_n)$ від моделювального $\bar{\tilde{y}}(\alpha) = (\tilde{y}_0,\dots,\tilde{y}_n)$, що є розв'язком макромоделі (2):

$$\xi(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} \left| \bar{y}(t_i) - \bar{\tilde{y}}(\alpha)(t_i) \right|, \quad i = \overline{1,m} . \tag{10}$$

Досліджено також, як залежать від параметра α елементи вектора коефіцієнтів $\bar{c}$ та порядок їх видалення під час редукції апроксимаційного базису.

Зазначимо, що функції (8)–(10) задані не алгебричними залежностями, а обчислювальними алгоритмами, за якими спочатку треба задати значення α, а потім, знайшовши згідно з (5) коефіцієнти апроксимації $\overline{c}(\alpha)$, обчислити значення цих функцій.

На тестових задачах виявлено, що якісні моделі отримують лише тоді, коли внаслідок редукції похибка $\xi(\alpha)$ має характерний гострий мінімум (рис. 1), що власне свідчить про вдалу регуляризацію. Рис.1 отримано у спеціальному інтерфейсі системи макромоделювання автономних об'єктів [5].

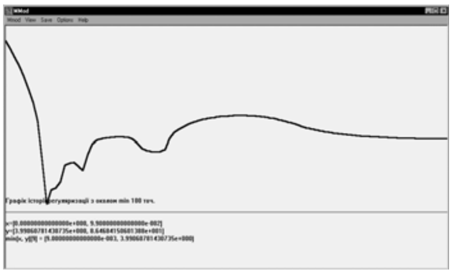

Рис. 1. Типова залежність похибки $\xi(\alpha)$ від регуляризаційного коефіцієнт-та α .

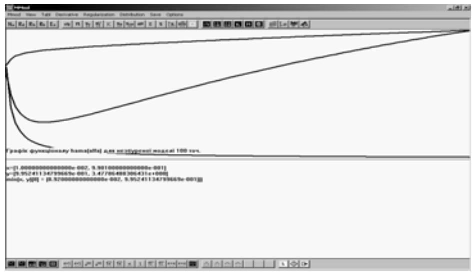

Рис. 2. Графіки: функціонала оптимізації $\Phi(\alpha)$ (монотонно зростаюча функція); одного з коефіцієнтів апроксимації $c_i(\alpha)$ (спадна функція); функції $\gamma(\alpha)$ (функція з мінімумом).

Отже, для оптимальних результатів регуляризації треба відшукати значення α, за якого залежність $\xi(\alpha)$ має чіткий мінімум. Область ($\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$), у межах якої є оптимальне α, можна визначити із поведінки функцій (8), (9). Емпірично з'ясовано, що ці функції зазнають швидких змін в околі мінімуму $\xi(\alpha)$ (рис. 2). Зокрема, функція (9) досягає мінімуму в точці, близькій до $\alpha_{\max}$. Нижню межу $\alpha_{\min}$ завжди вибирають такою, що дорівнює нулю.

Якщо область $(0,\alpha_{\max})$ визначена, то можна вдосконалити комбінований метод редукції. Запропоновано видаляти той з L доданків апроксимаційного полінома (6), для якого, замість умови $\max\delta_i$, виконується умова

$$\max_{i=1,L} \int_0^{\alpha_{\max}} \delta_i(\alpha)d\alpha \,, \tag{11}$$

тобто площа під графіком функції $\delta_i(\alpha)$ в межах області $(0,\alpha_{\max})$ є найбільшою.

Запропонована модифікація комбінованого методу редукції дає точнішу модель порівняно з редукцією при деякому незмінному значенні α.

Стислий опис методу регуляризації наведено в такому алгоритмі, який придатний для пошуку оптимальної моделі як під керуванням оператора, так і без втручання людини.

Алгоритм 1. Комбінована регуляризація методами редукції апроксимаційного полінома та згладжувального функціонала Тіхонова.

Задано вектор (3). Знайти моделі (2), розв'язок яких найліпше відтворює (3).

1. Вибрати максимальну кількість ітерацій редукції.

2. Обчислити $\xi(\alpha)$. Визначити, чи при вибраному апроксимаційному базисі є гострий мінімум. Якщо так, то відшукати значення $\alpha_{\text{опт}}$ з умови $\min \xi(\alpha)$ і зберегти параметри регуляризованої моделі $\bar{c}$ ($\alpha_{\text{опт}}$).
3. Проаналізувати (8), (9) для вибраного апроксимаційного базису і знайти граничне значення $\alpha_{\max}$.
4. За умовою (11) видалити відповідний доданок полінома (6), тобто зменшити розмірність апроксимаційного базису.
5. Якщо кількість ітерацій не більше максимальної, то перейти до п. 2.
6. Зі збережених моделей вибрати найліпші. Кінець алгоритму.

За цим алгоритмом знаходимо одну або кілька моделей з різними поліномами (6), за якими синтезуємо множину прогнозів.

Якщо за алгоритмом 1 не знайдено жодної задовільної моделі, тобто редукція не спричинила появи гострого мінімуму $\xi(\alpha)$, то описану процедуру регуляризації треба повторити для ширшого апроксимаційного базису з вищим степенем r апроксимаційного полінома (6) та (або) більшим порядком n системи (2).

У разі моделювання динамічних процесів, що задані часовими залежностями курсів валют, оптимальні результати отримані при $n = 2$ та $r = 3$, причому поліном (6) був редукований з 20 до 17–18 доданків. Для $r = 4$ оптимальна розмірність вектора $\bar{c}$ становила 18–32. Подальше збільшення n та r не поліпшувало результати.

Розглянемо тепер числове диференціювання (3) на основі методу ковзного апроксимаційного полінома. Метод полягає в побудові апроксимаційного степеневого полінома певного степеня на визначеній підмножині точок послідовності (1). Похідні обчислюють у внутрішніх точках підмножини аналітичним диференціюванням побудованого полінома. Далі підмножина апроксимації поступово “ковзає” вздовж послідовності (1), поки не будуть обчислені похідні в усіх точках.

Похибка диференціювання за методом ковзного апроксимаційного полінома суттєво залежить від степеня ковзного поліному s та кількості точок підмножини апроксимації v, причому $v>s$. Запропоновано обраховувати похідні у точках t_i, $i = 1,\ldots,m$ за різних значень s та v з наступним усередненням за формулою

$$\tilde{y}_K^{(j)}(t_i) = \sum_{k=1}^{K}\Big(y_k^{(j)}(t_i)\left|\tilde{y}_{K-1}^{(j)}(t_i) - y_k^{(j)}(t_i)\right|\Big) \Big/ \sum_{k=1}^{K} |\, \tilde{y}_{K-1}^{(j)}(t_i) - y_k^{(j)}(t_i)\,| , \tag{12}$$

де j – порядок похідної; k – номер набору (s,v); K – загальна кількість наборів; $\tilde{y}_{K-1}^{(j)}(t_i)$, $\tilde{y}_K^{(j)}(t_i)$ – усереднені значення похідних; $y_k^{(j)}(t_i)$ – похідна для k-го набору.

Припустимо, що для всіх t_i $\left|\tilde{y}_K^{(j)}(t_i) - \tilde{y}_{K-1}^{(j)}(t_i)\right| \to 0$ при $K\to\infty$. Численні практичні перевірки підтверджують це припущення.

На підставі цього припущення розроблено алгоритм обчислення похідної.

Алгоритм 2. Ітераційний пошук усереднених значень похідних.

Задано дискретну функціональну залежність (1). Треба знайти j-ту похідну $y^{(j)}(t_i)$, $j = 0,\ldots,n+1$, в усіх точках t_i, $I = 1,\ldots, m$.

1. Задати достатню кількість ковзних апроксимаційних поліномів з різними параметрами s та v ($v>s$), які застосовують для числового диференціювання.
2. Знайти методом ковзного апроксимаційного полінома значення похідних $y_k^{(j)}(t_i)$; $k = 1,2$; $i = 1,\ldots, m$, для перших двох ковзних поліномів.

3. Задати K=1. Знайти перше наближення до середнього значення похідної за формулою $\tilde{y}_1^{(j)}(t_i) = \left(y_1^{(j)}(t_i) + y_2^{(j)}(t_i)\right)\big/2$, I =1,…, m.
4. Задати K=K+1. Знайти наступне наближення за формулою (12) для i=1,…, m.
5. Повторювати п.4, доки $\left|\tilde{y}_K^{(j)}(t_i) - \tilde{y}_{K-1}^{(j)}(t_i)\right|$ не стане достатньо малим в усіх точках t_i, i =1,…, m.
6. Останнє усереднене значення є шуканою похідною: $\tilde{y}_K^{(j)}(t_i) = y^{(j)}(t_i)$; $i = \overline{1, m}$.

Числові експерименти засвідчили, що процедура знаходження усереднених похідних за алгоритмом 2 швидко збігається. Застосовано усереднення ковзними поліномами з параметрами s = 5–8 та v = 6–9. Унаслідок регуляризації числового диференціювання якість моделі (2), (5) суттєво поліпшувалася.

За алгоритмом 2 обчислюють похідні деякого наближення модельованої залежності (1), отриманого під час апроксимації ковзним поліномом. Тому під час ідентифікації за алгоритмом 1 замість модельованої залежності (1) доцільно брати нульову похідну $y^{(0)}(t_i)$, i = 1,…, m, визначену при числовому диференціюванні. Експерименти підтвердили, що це поліпшує якість моделі.

Після регуляризації числового диференціювання на графіку залежності $\xi(\alpha)$ залишається один мінімум, і в жодному з експериментів не простежено три мінімуми, що були в моделях з нерегуляризованим числовим диференціюванням (див. рис. 1).

Отже, розглянуто регуляризацію двох етапів ідентифікації макромоделі (2).

Викладений метод ідентифікації дає змогу уточнювати значення параметрів у разі доповнення модельованих даних (1) новими значеннями. Алгоритм такого уточнення викладено нижче.

Алгоритм 3. Регуляризована перебудова моделі в разі доповнення даних.

Нехай для даних (1) виконана регуляризована ідентифікація макромоделі (2), тобто знайдено редукований поліном (6) з відповідним вектором коефіцієнтів. Нехай також послідовність (1) доповнена додатковими значеннями функції $y(t_i)$, i = m+1,…, m^*. Треба знайти макромодель для доповнених даних.

1. Знайти за алгоритмом 2 похідні $y^{(j)}(t_i)$; i = 1,…, m^*; j = 0,…, n+1.
2. Знайти з (5) вектор $\overline{c}^*$ для доповненої послідовності.
3. Побудувати залежності (8)–(10). Аналізуючи їх, визначити границі області $(0,\alpha_{\max})$.
4. Якщо функція $\xi^*(\alpha)$ має в області $(0,\alpha_{\max})$ характерний мінімум, то визначити відповідне $\alpha_{\text{опт}}$ з умови $\min \xi^*(\alpha)$ й уточнити $\overline{c}^*(\alpha_{\text{опт}})$. Якщо функція $\xi^*(\alpha)$ не має характерного мінімуму, то будувати макромодель заново за алгоритмом 1.

Макромоделі, збудовані за алгоритмами 1–3, мають прогностичні властивості. Інтеграл системи (2) за межами інтервалу ідентифікації (t_1, t_m) зберігає динамічні властивості об’єкта ідентифікації, якщо макромодель добре відтворює задану послідовність (1). Отже, прогноз є достовірним, доки зберігаються умови, за яких зареєстрована залежність (1).

Зазначимо, що для обчислення прогнозу початкові умови інтегрування моделі (2) доцільно вибирати у прикінцевих точках залежності (1). Цей захід суттєво поліпшує прогностичні якості моделі. На рис. 3, 4 зображено розв’язки моделі, отримані при виборі початкових умов у першому та одному з останніх вузлів модельованої залежності. Помітно ліпша точність моделі, якщо початкові умови взято у прикінцевих точках області ідентифікації. Однак не варто брати початкові умови у крайніх точках, де різко зростає похибка диференціювання за алгоритмом 2.

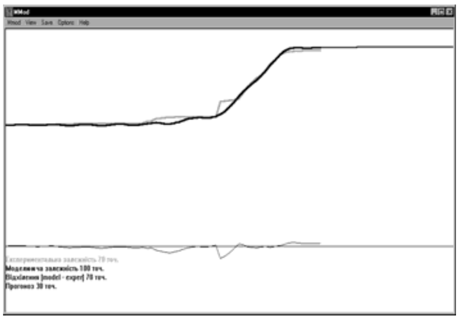

Рис. 3. Прогнозування курсу долара США відносно гривні в околі дефолту 1998 року. $n = 2$, $r = 3$, редукція до 17 членів. Модельована залежність за 70 днів (світліший тон), прогноз на 30 днів. Початкові умови у першій точці.

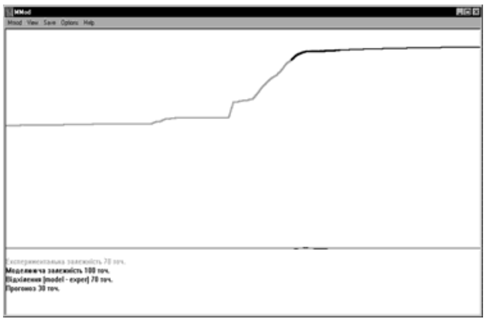

Рис. 4. Та ж модель, але початкові умови взяті у прикінцевій точці. Помітно ліпша точність в останніх вузлах апроксимації.

Зазвичай прогноз стосується невідомого майбутнього. Досліджувана модель дає змогу легко отримати ретроспективний прогноз (у минуле). Для цього достатньо в усіх рівняннях збудованої макромоделі (2) інвертувати знак правих частин (що відповідає інверсії часу), виконати інтегрування за обраних початкових умов і в отриманому розв’язку інвертувати час.

Експериментальні дослідження макромоделі (2), (5), побудованої за регуляризованими ідентифікаційними алгоритмами, підтверджують ефективність її застосування у задачах обчислення довготривалих прогнозів складних одновимірних залежностей.

Досліджені алгоритми регуляризованої ідентифікації поширюються також на неавтономні моделі. Хоча в статті наведені приклади лише економічних систем, розроблені методи стосуються будь-яких фізико-технічних систем, що можуть бути описані звичайними диференційними рівняннями.

1. *Курганевич А., Матвійчук Я.* Регуляризація задачі ідентифікації макромоделей нелінійних динамічних систем методом редукції апроксимаційного базису // Теор. електротехніка. 2000. Вип. 55. С. 31–36.
2. *Матвійчук Я.М.* Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія і практика. Львів: Вид–во ЛНУ, 2000. 214 с.
3. *Матвійчук Я.М.* Математичне моделювання хаотичних рухів у детермінованих системах // Вісн. Львів. ун–ту. Сер.фіз. 1993. Вип. 26. С. 61–66.
4. *Матвійчук Я., Курганевич А., Олива О., Паучок В.* Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія і практика // Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика. Зб. доп. укр.-пол. школи-семінару. Соліна, 10–13 вересня 2000 р. С. 103–106.

5. *Матвійчук Я., Паучок В*. Прогностичне моделювання економічних процесів // Вісн. Терноп. академії нар. госп-ва. 2001. Вип. 17. С. 34–39.
6. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

CORRECT IDENTIFICATION OF THE DYNAMIC PROGNOSTIC MACROMODELS

Ja. Matvijchuk, V. Pauchok

Lviv Polytechnic National University,
12 Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine.

The methods of a regularization are applied for parametric identification independent macromodel as a system of the ordinary differential equations on the basis of reduction of approximating base and Tihonov method, and also on a regularization of numerical derivation. The steady models, suitable for the long–lived prognoses are obtained.

Key words: macromodel, identification, regularization, prognosis.

Стаття надійшла до редколегії 01.11.2004
Прийнята до друку 01.06.2004