ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2004. Вип. 57. С. 24-30 *2004. Is. 57. P 24-30*

УДК 621.372.061

ДІАГОНАЛЬНА СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ТРИДІАГОНАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

В. Одінцова, Л. Синицький

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Тарнавського, 107, Львів, 79017, Україна
shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

Отримано достатні умови діагональної стійкості за Ляпуновим тридіагональних матриць довільної розмірності, а також визначено необхідні і достатні умови діагональної стійкості за Ляпуновим матриць 4×4, у яких елементи над– і піддіагоналі мають різні знаки.

Ключові слова: тридіагональна матриця, діагональна стійкість за Ляпуновим, D-стійкість, адитивна D-стійкість.

Матриця A – називається діагонально стійкою за Ляпуновим, якщо існує діагональна матриця $D > 0$ така, що $A^T D + DA$ додатньо визначена [1].

У цьому випадку, тривіальний розв'язок $x = 0$ диференційного рівняння $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$ асимптотично стійкий.

Нехай тридіагональна матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & c_1 & & & \\ g_1 & \bar{a}_2 & c_2 & & \mathbf{0} \\ & g_2 & \bar{a}_3 & & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & g_{n-1} & \bar{a}_n \end{pmatrix}, \ \bar{a}_i > 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{1}$$

Тоді

$$A^T D + DA = \begin{pmatrix} 2\bar{a}_1 d_1 & (c_1 d_1 + g_1 d_2) & & & \\ (c_1 d_1 + g_1 d_2) & 2\bar{a}_2 d_2 & (c_2 d_2 + g_2 d_3) & & \mathbf{0} \\ & (c_2 d_2 + g_2 d_3) & 2\bar{a}_3 d_3 & & \\ & & & \cdots & (c_{n-1} d_{n-1} + g_{n-1} d_n) \\ & \mathbf{0} & & (c_{n-1} d_{n-1} + g_{n-1} d_n) & 2\bar{a}_n d_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тут матриця $D = diag\{d_i\} > 0$.

Матриця $S = A^T D + DA$ є додатньо визначеною, тоді і лише тоді, коли всі послідовні головні мінори $\Delta_k \left(k = \overline{1,n}\right)$ додатні.

Запишемо для тридіагональної матриці співвідношення між головними мінорами:

$$\Delta_k = 2\overline{a}_k d_k \Delta_{k-1} - \left(c_{k-1}d_{k-1} + g_{k-1}d_k\right)^2 \Delta_{k-2}\,. \quad (3)$$

Якщо для деякого k $c_{k-1}g_{k-1} < 0,$ то завжди можна обрати $\dfrac{d_k}{d_{k-1}} > 0$ таке, що $c_{k-1}d_{k-1} + g_{k-1}d_k = 0$. Тоді $\Delta_k = 2\overline{a}_k d_k \Delta_{k-1} > 0$, якщо $\Delta_{k-1} > 0$.

У цьому разі матриця *S* набуває блоково-діагонального вигляду. Розмірність кожного блока визначена відстанню між двома сусідніми нулями піддіагоналі (наддіагоналі) матриці *S*. Наприклад, якщо $c_i g_i < 0$ і $c_j g_j < 0$ $(i < j)$, то розмірність блока дорівнює $c_{k-1}g_{k-1} > 0$. В цьому випадку замість матриці *S* розглядають її блоки, які можуть бути значно менших розмірів. Це дає ширші умови діагональної стійкості за Ляпуновим матриці *A*, тобто більш слабкі обмеження на елементи матриці *A*.

У частковому випадку при $c_k g_k < 0$ $\forall k = \overline{1, n-1}$, відповідно до (2), $A^T D + DA$ є діагональною матрицею з додатними елементами, отже, *A* діагонально стійка за Ляпуновим.

Розглянемо випадок, коли $c_{k-1}g_{k-1} > 0$.

З урахуванням співвідношення (3) нерівність $\Delta_k > 0$ набуде вигляду

$$2\overline{a}_k d_k \Delta_{k-1} - \left(c_{k-1}d_{k-1} + g_{k-1}d_k\right)^2 \Delta_{k-2} > 0\,; \quad \text{або}$$

$$2\overline{a}_k \Delta_{k-1} > \left(c_{k-1}d_{k-1}\frac{1}{\sqrt{d_k}} + g_{k-1}\sqrt{d_k}\right)^2 \Delta_{k-2}\,. \quad (4)$$

Очевидно, що умови діагональної стійкості за Ляпуновим матриці *A* будуть найширшими у випадку, коли права частина нерівності (4) мінімальна. Мінімум досягається при $d_k = \dfrac{c_{k-1}}{g_{k-1}} d_{k-1}$.

Якщо прийняти $d_1 = 1$, то значення d_k, що забезпечують діагональну стійкість за Ляпуновим матриці *A* за найменш жорстких обмежень на елементи матриці, визначені рівностями

$$d_k = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{g_i}\,,\ k = \overline{2, n-1}\,. \quad (5)$$

Уведемо позначення $a_k = 2\overline{a}_k d_k$, $k = \overline{1,n}$ $\quad b_k = c_k d_k + g_k d_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$.

Тоді матриця *S* матиме вигляд

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & \mathbf{0} & \\ & b_2 & a_3 & & \\ & & & \ddots & b_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

У цьому разі (3) набуде такого вигляду

$$\Delta_k = a_k \Delta_{k-1} - b_{k-1}^2 \Delta_{k-2} \quad \left(k = \overline{2,n}\right). \tag{6}$$

Позначимо $A_k = \prod_{i=1}^{k} a_i$ і розділимо (6) на A_k

$$\frac{\Delta_k}{A_k} = \frac{\Delta_{k-1}}{A_{k-1}} - \frac{b_{k-1}^2}{a_{k-1} a_k} \cdot \frac{\Delta_{k-2}}{A_{k-2}} \quad \left(k = 2,\ldots,n\right). \tag{7}$$

Уведемо позначення: $y_k = \frac{\Delta_k}{A_k}, \quad \gamma_k = \frac{b_k^2}{a_k a_{k+1}}$.

Тоді (7) набуде вигляду

$$y_k = y_{k-1} - \gamma_{k-1} \cdot y_{k-2} \quad \left(k = 2,\ldots,n\right). \tag{8}$$

Тут, очевидно, $y_1 = \frac{\Delta_1}{a_1} = 1$. Приймаємо $y_0 = 1$.

Позначимо $z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{y_k}$. Тоді $z_1 = \frac{y_1}{y_0} = 1$.

Різницеві рівняння (8) будуть мати вигляд

$$z_{k+1} = 1 - \frac{\gamma_k}{z_k} \quad \left(k = \overline{1, n-1}\right). \tag{9}$$

Розглянемо частковий випадок $\gamma_k = \varepsilon \quad \forall k$. Тоді

$$\overline{z}_{k+1} = 1 - \frac{\varepsilon}{\overline{z}_k} \quad \left(k = \overline{1, n-1}\right). \tag{10}$$

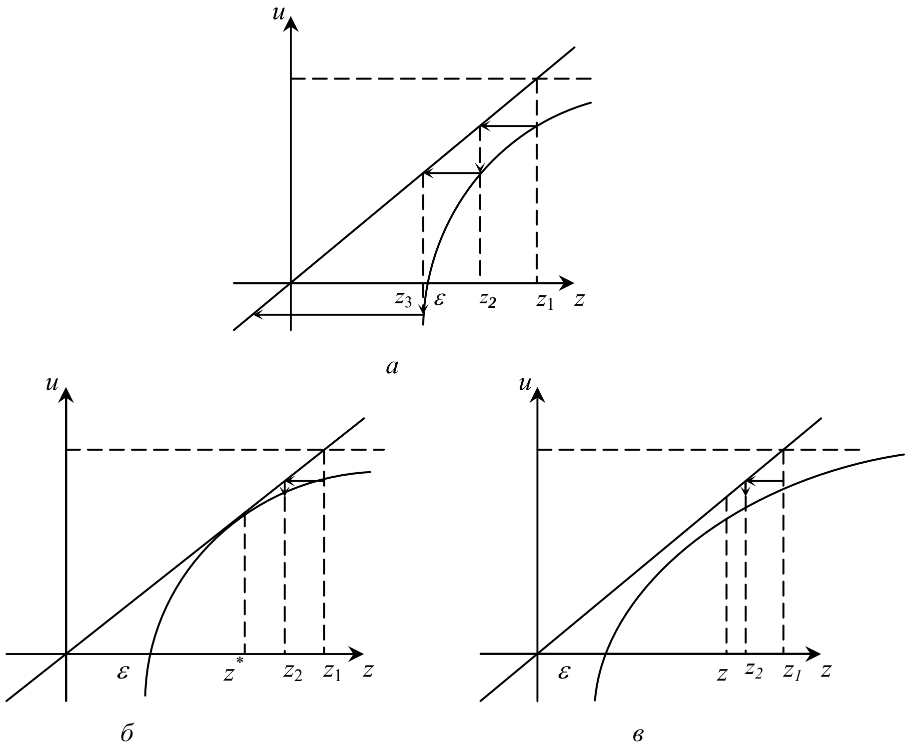
Оскільки нас цікавить випадок, коли всі $\overline{z}_k$ додатні, то про послідовність $\{\overline{z}_k\}$ можна сказати, що вона спадна $\overline{z}_{k+1} < \overline{z}_k$ й обмежена знизу $\overline{z}_k > 0$. А отже, послідовність $\overline{z}_k$ має границю. Її легко визначити.

Нехай $z^* = \lim_{k\to\infty} \overline{z}_k$. Тоді

$$z^* = 1 - \frac{\varepsilon}{z^*} \text{ або } z^{*2} - z^* + \varepsilon = 0 \text{. Звідси } z^* = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \varepsilon}.$$

Отже, границя існує тільки при $\varepsilon \le \frac{1}{4}$, і послідовність $\overline{z}_k$ збігається до $z^* > 0$. При $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $z^* = \frac{1}{2}$, а при $\varepsilon < \frac{1}{4}$, $z^* = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \varepsilon} > 0$. При $\varepsilon > \frac{1}{4}$ границі не існує, тобто $\overline{z}_k$, очевидно, при певних значеннях *k* може бути від'ємним.

Змалюємо цю ситуацію за допомогою діаграми Кенігса-Ламерея. Побудуємо на площині криву $u = f(z) = 1 - \frac{\varepsilon}{z}$ і пряму $u = z$.



Діаграми Кенігса–Ламерея: $а - \varepsilon > \dfrac{1}{4}$; $б - \varepsilon > \dfrac{1}{4}$; $в - \varepsilon > \dfrac{1}{4}$.

Очевидно, можливі три варіанти взаємного розташування кривої і прямої залежно від значення ε (див. рисунок). Із діаграми видно, що у випадку *а* $\overline{z}_k$, починаючи з деякого номера *k*, стає від'ємним. У випадках *б* і *в* цього не відбувається. Послідовність $\overline{z}_k$ додатна і збігається до z^*.

Повернемось до різницевих рівнянь (9) і приймемо $\gamma_k \le \varepsilon \quad \forall k = \overline{1, n-1}$.

Якщо $z_k \ge \overline{z}_k$, то $z_{k+1} \ge \overline{z}_{k+1}$. Справді $z_{k+1} - \overline{z}_{k+1} = \dfrac{\varepsilon}{\overline{z}_k} - \dfrac{\gamma_k}{z_k} \ge 0$.

Отже, якщо виконуються умови

$$\gamma_k \le \varepsilon \left(\forall k\right), \tag{11}$$

і $\varepsilon \le \dfrac{1}{4}$, то для всіх значень *k* $z_k \ge \overline{z}_k > 0$, що гарантує стійкість матриці *S*, а отже і діагональну стійкість за Ляпуновим матриці *A*.

Отримані умови діагональної стійкості матриці A передбачають, що розмірність матриці не обмежена. Оскільки реально розмірність матриці A n – скінченне число, то нерівності $\gamma_k = \dfrac{b_k^2}{a_k a_{k+1}} \le \varepsilon = \dfrac{1}{4} \quad \forall k = \overline{1, n-1}$ є надто строгими. Нескладно обчислити значення ε, тобто визначити умови діагональної стійкості за Ляпуновим матриці A для різних значень n. Обчислені значення ε такі:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ε	1	0,5	0,38	0,33	0,30	0,29	0,28	0,27	0,27	0,26

У випадку, коли елементи c_i, g_i матриці A такі, що $c_i g_i < 0$, то під величиною n розуміють розмір найбільшого блока матриці S.

Видно, що для матриць малих порядків ε значно перевищує 0,25. Наприклад, для матриць четвертого порядку умови діагональної стійкості за Ляпуновим мають вигляд

$$\gamma_k = \frac{b_k^2}{a_k a_{k+1}} \le 0{,}38 \quad k = 1,2,3 .$$

Зі збільшенням порядку матриці значення ε прямує до 0,25.

Отже, умова (11) зі значеннями ε, що взяті із таблиці, є достатньою умовою діагональної стійкості за Ляпуновим матриці A.

Однак деякі γ_k можуть перевищувати значення ε; якщо інші γ_j ($j \neq k$) компенсують це перевищення, і матриця A може бути діагонально стійкою за Ляпуновим.

Тому важливо мати оцінки, що враховують взаємозв'язок усіх γ_k. Це неважко зробити для матриць невисокого порядку. Наприклад, для матриць 4×4 отримуємо нерівності

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 < 1; \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1\gamma_3 < 1. \end{cases} \tag{12}$$

Виконання нерівностей (12) забезпечує діагональну стійкість за Ляпуновим матриці 4×4.

Якщо матриця A діагонально стійка за Ляпуновим, то вона D-стійка [2].

У цьому легко переконатись, якщо в рівнянні Ляпунова $(DA)^T B + B(DA) = C$ прийняти $B = D_0 D^{-1} > 0$. Отримаємо $A^T D D_0 D^{-1} + D_0 D^{-1} D A = A^T D_0 + D_0 A = C > 0$. Отже, матриця A – D-стійка.

Якщо матриця діагонально стійка за Ляпуновим, то вона також адитивно D-стійка, тобто $A + D$ стійка для всіх $D > 0$.

Справді, нехай $A^T D_0 + D_0 A > 0$ і нехай D – довільна додатна діагональна матриця. Тоді $(A+D)^T D_0 + D_0 (A+D) = A^T D_0 + D_0 A + 2 D_0 D > 0$, тобто матриця A адитивно D-стійка.

Викладену методику дослідження на стійкість тридіагональних матриць можна застосувати і до повної матриці 4×4.

Розглянемо частковий випадок, коли матриця 4×4 має додатні діагональні елементи, і коли відповідні елементи над- та піддіагоналі мають різні знаки.

Нехай матриця A 4×4 має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} & a_{14} \\ g_1 & a_{22} & c_2 & a_{24} \\ a_{31} & g_2 & a_{33} & c_3 \\ a_{41} & a_{42} & g_3 & a_{44} \end{pmatrix}, a_{ii} > 0 \quad \left(i = \overline{1,4}\right);\ c_i g_i < 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{13}$$

Тоді

$$A^T D + DA = \begin{pmatrix} 2a_{11}d_1 & (c_1 d_1 + g_1 d_2) & \left(a_{13}d_1 + a_{31}d_3\right) & \left(a_{14}d_1 + a_{41}d_4\right) \\ (c_1 d_1 + g_1 d_2) & 2a_{22}d_2 & (c_2 d_2 + g_2 d_3) & \left(a_{24}d_2 + a_{42}d_4\right) \\ \left(a_{13}d_1 + a_{31}d_3\right) & (c_2 d_2 + g_2 d_3) & 2a_{33}d_3 & (c_3 d_3 + g_3 d_4) \\ \left(a_{14}d_1 + a_{41}d_4\right) & \left(a_{24}d_2 + a_{42}d_4\right) & (c_3 d_3 + g_3 d_4) & 2a_{44}d_4 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Тут матриця $D = diag\left\{d_1, d_2, d_3, d_4\right\} > 0$.

Якщо $c_i g_i < 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right)$, то матрицю D можна вибрати так, що елементи над- та піддіагоналі матриці $S = A^T D + DA$ будуть нульовими.

Елементи матриці D, в цьому випадку, визначаються зі співвідношень

$$c_i d_i + g_i d_{i+1} = 0 \quad i = \overline{1,3} \tag{15}$$

Якщо прийняти $d_1 = 1$, то отримаємо

$$d_2 = -\frac{c_1}{g_1}; \quad d_3 = \frac{c_1 c_2}{g_1 g_2}; \quad d_4 = -\frac{c_1 c_2 c_3}{g_1 g_2 g_3}. \tag{16}$$

Для спрощення запису введемо позначення:

$$\begin{aligned} &a_i = 2a_{ii}d_i \left(i = \overline{1,4}\right); \\ &\alpha_0 = a_{13}d_1 + a_{31}d_3; \\ &\alpha_1 = a_{14}d_1 + a_{41}d_4; \\ &\alpha_2 = a_{24}d_2 + a_{42}d_4. \end{aligned} \tag{17}$$

З урахуванням (17) матриця S набуде вигляду

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_0 & 0 & a_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & a_4 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Матриця S додатно визначена тоді і лише тоді, коли всі її послідовні головні мінори $\Delta_k \left(k = \overline{1,4}\right)$ додатні. А саме:

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_1 > 0; \\ \Delta_2 = a_1 a_2 > 0; \\ \Delta_3 = a_2 (a_1 a_3 - a_0{}^2) > 0; \\ \Delta_4 = (a_1 a_3 - a_0{}^2)(a_2 a_4 - a_2{}^2) - a_2 a_3 a_1{}^2 > 0, \end{cases} \tag{19}$$

або

$$\begin{cases} a_1 a_3 - a_0{}^2 > 0; \\ (a_1 a_3 - a_0{}^2)(a_2 a_4 - a_2{}^2) > a_2 a_3 a_1{}^2. \end{cases} \tag{20}$$

Отже, для матриці A вигляду (13) ми отримали необхідні і достатні умови діагональної стійкості за Ляпуновим.

1. *Barker G., Berman A., Plemmons R.* Positive diagonal solutions to the Lyapunov equations. Linear and Multilinear Algebra 5. 1978. P. 249–256.
2. *Gershkowitz D*. Recent Directions in Matrix Stability. Linear Algebra and Its Applications 171. 1992. P. 161–186.

LYAPUNOV DIAGONAL STABILITY OF TRIDIAGONAL MATRICES

V. Odintsova, L. Sinitsky

Ivan Franko National University of Lviv,
Tarnavsky Str. 107, UA–79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

Sufficient conditions for Lyapunov diagonal stability of tridiagonal matrices are obtained. Sufficient and necessary conditions are obtaited for 4×4 matrices in the case when the upper and low offdiagonal elements have opposite signs.

Key words: tridiagonal matrix, Lyapunov diagonal stability, D-stability, additive D-stability.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.2004
Прийнята до друку 01.07.2004