ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ELECTRICAL ENGINEERING
2004. Вип.57. С.153-158 2004. Is.57. P.153-158

УДК 621.325

МЕТОДИ СИНТЕЗУ ГЕНЕРАТОРІВ З БАГАТЬМА ПЕРІОДИЧНИМИ РЕЖИМАМИ, З РІЗНИМИ ЧАСТОТАМИ І ЗМІНОЮ ФОРМИ КОЛИВАНЬ

Л. Синицький, Я. Шмигельський

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна
shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

Розглянуто методи синтезу математичних моделей автоколивних систем, у яких можуть існувати декілька періодичних режимів. На прикладах систем другого порядку описано, як можна отримати генератори з багатьма гармонічними режимами, що відрізняються частотами та амплітудами коливань, а також генератори з багатьма несинусоїдними режимами.

Ключові слова: автоколивні системи другого порядку, генератори періодичних коливань, методи синтезу математичних моделей автогенераторів.

Існування багатьох періодичних режимів в автоколивних системах другого порядку є добре відомим із середини XX ст. [2]. Ідея полягає в тому, що у рівнянні

$$\ddot{x} + f(x)\cdot\dot{x} + x = 0 \tag{1}$$

коефіцієнт загасання $f(x)$ є нелінійною функцією від x, яка багато разів змінює знак на деякому відрізку $|x| \le x_M$. Подібне твердження також правильне для рівняння

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0\,, \tag{2}$$

якщо $F(\dot{x})$ має аналогічну властивість відносно швидкості $\dot{x}$.

Амплітуди автоколивань для (1) можна оцінити, якщо використати співвідношення

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) = -f(x)\cdot\dot{x}^2\,,$$

з якого випливає

$$\int_0^T f(x)\dot{x}^2 dt = 0\,, \tag{3}$$

де T - період коливань.

Розглянемо випадок, коли

$$f(x) = a\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^{m+1}\delta(x - mx_0)\,,$$

тобто $f(x)$ є періодичною функцією з періодом $2x_0$, утвореною послідовністю δ-імпульсів, що почергово змінюють знак. У разі достатньо малого значення a можна вважати, що виникають коливання, близькі до гармонічних

$$x(t) = A\sin t,$$

причому амплітуда A задовольняє нерівність

$$(2k-1)x_0 < A < 2kx_0.$$

У цьому випадку (3) набуває вигляду

$$aA^2 \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^{m+1} \cos^2 t_m = 0. \tag{4}$$

Значення t_m обчислюють з рівності $\sin t_m = \dfrac{mx_0}{A}$, тобто

$$\cos^2 t_m = 1 - \frac{m^2 x_0^2}{A^2}.$$

З урахуванням цього запишемо (4) у вигляді

$$\frac{-aA^2}{2} + aA^2 \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^{m+1} - ax_0^2 \sum_{m=1}^{2k-1} m^2 (-1)^{m+1} = 0.$$

З огляду на те, що кількість доданків непарна, перша сума дорівнює aA^2, і для квадрата амплітуди маємо вираз

$$A^2 = 2x_0^2 \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^{m+1} m^2 .$$

Значення амплітуди A залежно від k такі:

$k=$	1	2	3	4
$A=$	$\sqrt{2}x_0$	$3,46x_0$	$5,5x_0$	$7,5x_0$

Зрозуміло, що аналогічні співвідношення можна отримати, якщо амплітуда коливань обмежена нерівностями

$$2kx_0 < A < (2k+1)x_0.$$

Проте знайдені в цьому випадку періодичні режими є нестійкими.

У розглянутому прикладі всі періодичні режими мають однакову частоту (у межах припущення можливості використання для аналізу методу гармонічного балансу) і гармонічну форму коливань. Відмінність між різними можливими режимами полягає тільки у значеннях амплітуди.

Подібне дослідження можна застосувати для нелінійних систем

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0,$$

що близькі до нелінійних консервативних.

Для відповідної консервативної системи маємо

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x \varphi(\xi)d\xi\right] = 0,$$

або

$$\dot{x}^2 = 2(E - \int_0^x \varphi(\xi)d\xi),$$

де стала E є енергією системи. В цьому випадку умова (3) набуває вигляду

$$\int_0^T f(x(t)) \cdot \left[E - \int_0^{x(t)} \varphi(\xi)d\xi \right] dt = 0.$$

Нехай періодичний розв'язок для консервативної системи $\tilde{x} = x(t, E)$. Амплітуду коливань для певного значення енергії E визначають зі співвідношення

$$\int_0^{x_{\max}} \varphi(\xi)d\xi = E.$$

Якщо зберегти припущення про функцію $f(x)$ у вигляді послідовності δ-імпульсів, то в разі відомого розв'язку $\tilde{x} = x(t, E)$ можна отримати співвідношення, аналогічні (4), які визначать можливі значення амплітуд автоколивань. Зрозуміло, що в цьому випадку форма коливань і їхня частота будуть змінюватись залежно від E, тобто від амплітуди коливань $x_{\max}$.

Подальші розрахунки зручніше виконувати для системи двох рівнянь першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -f_2(x, y), \tag{5}$$

які у частинному випадку розглянемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)y; \quad \frac{dy}{dt} = -f(x, y)x$$

при $f(x, y) = (x^2 + y^2)^n$, n – ціле.

Для довільної функції $f(x, y)$ маємо перший інтеграл у вигляді $x^2 + y^2 = r^2$. Тоді, зробивши заміну змінних $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, отримаємо

$$r\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = r^{2n} r\cos\varphi,$$

$$-r\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} = -r^{2n} r\sin\varphi,$$

або

$$\frac{d\varphi}{dt} = r^{2n}$$

Остаточно маємо

$$x = r\sin r^{2n}t, \quad y = r\sin r^{2n}t$$

Позначимо $\omega_n = r^{2n}$, тоді

$$x = \omega_n^{\frac{1}{2n}} \sin\omega_n t, \quad y = \omega_n^{\frac{1}{2n}} \cos\omega_n t \tag{6}$$

Отже, залежно від n можна отримати різноманітні залежності частоти коливань від амплітуди. В частинних випадках при $n = 0,5$ частота коливань прямо пропорційна до амплітуди; при $n = -0,5$ добуток амплітуди на частоту є сталим.

Для отримання в цих випадках декількох можливих автоколивних режимів уведемо дисипативні доданки, які змінюються періодично залежно від значень x та y. У результаті одержимо систему двох рівнянь:

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_1(x)x+(x^2+y^2)^n y;\quad \frac{dy}{dt}=\varphi_2(y)y+(x^2+y^2)^n x \tag{7}$$

Як і раніше, приймаємо $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(y)$ у вигляді послідовності δ-імпульсів

$$\varphi_1(x)=a\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+1}\delta(x-mx_0);\quad \varphi_2(y)=a\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+1}\delta(y-my_0). \tag{8}$$

Якщо вважати, що параметр a малий, то знову шукаємо розв'язок у вигляді гармонічних коливань на частоті ω. Відмінність полягає в тому, що амплітуда коливань визначена частотою ω і показником n, а також треба узгоджувати розв'язки відносно двох змінних x та y.

З виразу (7)

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[x^2+y^2\right]=\varphi_1(x)x^2+\varphi_2(y)y^2.$$

З умови періодичності процесу отримуємо:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}[\varphi_1(x)x^2+\varphi_2(y)y^2]dt=0. \tag{9}$$

Згідно з (6) співвідношення (9) набуває вигляду

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}[\varphi_1(x)\cdot\sin^2\omega t+\varphi_2(x)\cdot\cos^2\omega t]dt=0. \tag{10}$$

Для системи без втрат амплітуди коливань для $x(t)$ і $y(t)$ збігаються, тобто $A=\omega^{\frac{1}{2n}}$. Тому в (8) необхідно прийняти $y_0=x_0$. У результаті співвідношення (10) збігається з (4), і можливі значення амплітуди для стійких періодичних режимів визначені співвідношенням

$$(2k-1)x_0<A<2kx_0.$$

У першому наближенні для знайдених періодичних режимів коливання залишаються гармонічними.

Автоколивальну систему з багатьма несинусоїдальними періодичними режимами дослідимо на прикладі консервативної нелінійної системи, у яку потім уведемо знакозмінний дисипативний доданок. Нехай консервативну систему описує рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x^3=0. \tag{11}$$

Розв'язок (11) шукаємо методом гармонічного балансу з урахуванням першої та третьої гармонік

$$x=A_1\sin\omega t+A_3\sin 3\omega t,$$

нехтуючи всіма вищими гармоніками. Тоді

$$x^3 = \left(\frac{3}{4}A_1^3 - \frac{3}{4}A_1^2 A_3 + \frac{3}{2}A_1 A_3^2\right)\sin\omega t + \left(-\frac{1}{4}A_1^3 + \frac{3}{4}A_3^3 + \frac{3}{2}A_1 A_3^2\right)\sin 3\omega t\ .$$

Маємо два рівняння відносно ω і $a = \dfrac{A_3}{A_1}$

$$\begin{gathered}\omega^2 = A_1^2\left(+\frac{3}{4} - \frac{3}{4}a - \frac{3}{2}a^2\right),\\ \omega^2 a = \frac{1}{9}A_1^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2\right),\end{gathered} \tag{12}$$

які визначають частоту і параметр a залежно від амплітуди першої гармоніки A_1.

Після вилучення з (12) ω^2 отримаємо рівняння відносно a.

$$9\left(-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^3\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2\right) = 0\ ,$$

або

$$51a^3 - 33a^2 + 27a + 1 = 0\,. \tag{13}$$

З виразу (13) випливає, що рівень третьої гармоніки щодо першої залишається сталим. Значення третьої гармоніки порівняно невелика і становить приблизно $3{,}5\%$ від першої. Без сумніву, цей висновок не є повністю правильним тому, що знехтувано п’ятою і вищими гармоніками.

Проте, якщо використовувати (11) для синтезу генераторів з багатьма періодичними режимами, то можливе створення математичної моделі, у якій частота коливань практично пропорційна до амплітуди коливань. Форма коливань близька до синусоїдних, а сама модель простіша порівняно з (7) і має більший практичний зміст. Це зумовлено тим, що нелінійності в (7) досить екзотичні.

Для консервативних систем можливе перетворення їх у генератор з багатьма періодичними режимами, якщо використати модифіковані рівняння Гамільтона у вигляді

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} - f(H)\frac{\partial H}{\partial x};\\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} - f(H)\frac{\partial H}{\partial y}.\end{gathered} \tag{14}$$

Цей підхід використано в [1] для побудови генераторів з довільною формою коливань. З рівнянь (14) отримаємо

$$\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = -f(H)\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right],$$

або

$$\frac{dH}{dt} = -f(H)\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right].$$

Якщо значення гамільтоніана не відповідає стану рівноваги, то

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 > 0 .$$

Стале значення H можливе тільки при $f(H) = 0$.

Нехай

$$f(H) = \sin\frac{H}{H_0} .$$

Тоді можливі стани рівноваги визначені умовою

$$H = k\pi H_0 , \qquad \text{де } k - \text{ціле}.$$

Стійкість станів рівноваги визначена знаком похідної $f'(H)$. Стани рівноваги є стійкими, якщо $f'(H) > 0$.

Отже, відбувається чергування стійких і нестійких граничних циклів уздовж осі H, як і в розглянутих вище випадках.

---

1. *Синицький Л.А., Смаль І.В.* Синтез автоколивних систем, що відтворюють один із розв'язків гамільтонової системи // Журн. фіз. досліджень. 2000. Т.4. №1. - С.1-5.
2. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Пер. с англ. - М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. - 264с.

METHODS OF SYNTHESIS OF GENERATORS WITH MANY PERIODIC MODES, WITH DIFFERENT FREQUENCIES AND CHANGE OF THE FORM OF OSCILLATIONS

L. Sinitsky, Y. Shmygelsky

Ivan Franko of Lviv National University
Tarnavsky Str. 107, UA–79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

The methods of synthesis of mathematical models of oscillators are considered, in which there can be some periodic modes. On examples of systems of the second order is shown, as it is possible to receive generators with many harmonic modes, which differ by frequencies and amplitudes of oscillations and also generators with many nonsinusoidal waves modes.

Key words: auto oscillatory systems of the second order, generators of periodic oscillations, methods of synthesis of mathematical models of oscillators.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.04
Прийнята до друку 01.07.2004