ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2004. Вип. 57. С. 145-152 *2004. Is. 57. P. 145-152*

УДК 621.376

РОЗРАХУНОК СЛАБКОГО ПОВЕРХНЕВОГО ЕФЕКТУ В КРУГЛОМУ ФЕРОМАГНІТНОМУ ПРОВІДНИКУ

І. Романишин[*], Л. Синицький[**]

[*]*Фізико-механічний інститут НАН України*
вул. Наукова, 5, 79053, Львів, Україна
romanyshyn@ipm.lviv.ua
[**]*Львівський національний університет імені Івана Франка*
вул. ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна

Розглянуто ітераційну процедуру побудови послідовних наближень до стаціонарного розв’язку параболічного рівняння з малим параметром при похідній за часом. Ця процедура застосована для аналізу поверхневого ефекту в круглому феромагнітному провіднику. На кожній ітерації за стаціонарний розв’язок параболічного рівняння прийнято розв’язок звичайного диференціального рівняння. Добре узгодження з точним розв’язком у випадку, коли μ = const, дає підстави стверджувати про ефективність методу для розрахунку феромагнітного провідника у випадку слабкого поверхневого ефекту. Для нелінійної задачі точність методу підтверджена порівнянням з числовим розв’язком.

Ключові слова: поверхневий ефект, феромагнітний провідник, ітераційна процедура.

Опис процесу загасання електромагнітного поля в об'ємних провідниках у разі нехтування струмами зміщення зводиться до параболічного рівняння

$$\Delta H = \gamma \frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1}$$

де γ – питома провідність; $\boldsymbol{H}$ – напруженість магнітного поля; $\boldsymbol{B}$ – вектор магнітної індукції; Δ – лапласіан.

Для повільно змінних режимів за нульове наближення до стаціонарного розв’язку (1) приймемо розв’язок рівняння

$$\Delta H^{(0)} = 0, \tag{2}$$

яке описує магнітостатичний процес. За l-го наближення до стаціонарного рішення (1) приймемо розв’язок рівняння

$$\Delta H^{(l)} = \gamma \mu_d (H^{(l-1)}) \frac{\partial H^{(l-1)}}{\partial t}, \tag{3}$$

де $\mu_d(H) = \dfrac{\partial B}{\partial H}$ – диференціальна магнітна проникність.

Розглянемо ітераційну процедуру (2), (3) побудови послідовних наближень до стаціонарного розв'язку рівняння (1) стосовно аналізу поверхневого ефекту в круглому однорідному провіднику з радіусом поперечного перерізу *R*. У цьому разі розподіл напруженості магнітного поля вздовж радіуса перерізу описує рівняння

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H = \gamma \mu_d(H) \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{4}$$

яке в лінійному випадку (при $B = \mu H$, μ=const) є рівнянням Бесселя.

До аналогічної моделі зводиться задача аналізу поверхневого ефекту в магнітному колі (у випадку, коли вектор напруженості магнітного поля паралельний до осі циліндра).

Розв'язок рівняння (4) при $B = \mu H$, μ=const для комплексної амплітуди напруженості магнітного поля запишемо у вигляді [1]

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{2\pi R} \frac{J_1\left(\sqrt{-j}\sqrt{\omega\mu\gamma r}\right)}{J_1\left(\sqrt{-j}\sqrt{\omega\mu\gamma R}\right)}, \tag{5}$$

де $\dot{I}$ – комплексна амплітуда струму, який протікає через провідник; J_1 – функція Бесселя першого роду і першого порядку.

З метою оцінити можливості методу для феромагнітного матеріалу застосуємо спочатку його до розв'язування (4) в лінійному випадку, коли $B = \mu H$. Нульове наближення відповідає полю за постійного струму і задовольняє однорідне звичайне диференціальне рівняння Ейлера

$$\frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H^{(0)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H^{(0)} = 0. \tag{6}$$

Розв'язок рівняння (6) запишемо у вигляді

$$H^{(0)} = \frac{I}{2\pi R^2} r. \tag{7}$$

Такий же вираз напруженості магнітного поля отримаємо із закону повного струму у випадку припущення про рівномірний розподіл струму по перерізу провідника.

Рівняння для першого наближення одержимо після підстановки в праву частину (4) нульового наближення. Тоді для визначення першого наближення отримаємо неоднорідне рівняння Ейлера

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H = \gamma\mu \frac{I'}{2\pi R^2} r, \tag{8}$$

де I' – похідна за часом.

Його частковим розв’язком є

$$H_s^{(1)} = \frac{1}{8}\gamma\mu\frac{1}{2\pi R^2}I' r^3 .$$

Загальний розв’язок рівняння (8) запишемо у вигляді

$$H^{(1)} = Cr + \frac{1}{8}\gamma\mu\frac{1}{2\pi R^2}I' r^3 .$$

Із закону повного струму ($H^{(1)}(R)\times 2\pi R = I$) випливає

$$C = \frac{I}{2\pi R^2} - \frac{1}{8}\gamma\mu\frac{I'}{2\pi}$$

і

$$H^{(1)} = \frac{I}{2\pi R^2}r + \frac{1}{8}\gamma\mu\frac{1}{2\pi R^2}I' r\left(r^2 - R^2\right). \tag{9}$$

На підставі (3) l-не наближення визначимо як розв’язок такого рівняння:

$$\frac{\partial^2 H^{(l)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H^{(l)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}H^{(l)} = \gamma\mu\frac{\partial H^{(l-1)}}{\partial t}, \tag{10}$$

$H^{(l-1)}$ – $(l - 1)$ – не наближення.

Розглянемо співвідношення побудованих наближень з розв’язком (5).

Розкладемо вираз (5) у ряд за степенями $\omega\gamma\mu << 1$ з точністю до членів третього степеня включно:

$$\dot{H} \approx \frac{\dot{I}}{2\pi R}\frac{r}{R}\left[1 + \frac{j\omega\mu\gamma}{8}\left(r^2 - R^2\right)\right]. \tag{11}$$

Наведений вираз збігається з наближенням (9) у випадку, коли $I = \dot{I}\exp(j\omega t)$. Аналогічно можна отримати і зіставити вищі наближення.

Зазначимо, що нульове наближення (7) не відображає поверхневого ефекту і містить тільки дійсну частину. Перше наближення (9) є сумою нульового і членів, пропорційних до першої похідної від струму, що протікає, які при $I = \dot{I}\exp(j\omega t)$ є суто уявними. Це приводить до того, що, як випливає з (11), простежується зростання модуля першого наближення порівняно з режимом відсутності скін-ефекту як на поверхні провідника, так і в околі його осі. Отже, перше наближення не описує якісні закономірності поверхневого ефекту. Друге наближення – це сума першого і членів, пропорційних до другої похідної від струму, що протікає, які при $I = \dot{I}\exp(j\omega t)$ є дійсними й уточнюють дійсну частину (11). Третє наближення уточнює уявну частину (11). Тому для аналізу поверхневого ефекту треба використовувати наближення, не нижче за друге.

На підставі ітераційної процедури (10) отримаємо, що третє наближення набуває вигляду полінома непарних степенів r із залежними від часу коефіцієнтами:

$$H^{(3)}(r,t) = C_1(t)r + C_3(t)r^3 + C_5(t)r^5 + C_7(t)r^7\,, \tag{12}$$

де

$$C_1 = \frac{1}{2\pi R^2}\left(I - \frac{\gamma\mu R^2}{8} I' + \frac{\left(\gamma\mu R^2\right)^2}{96} I'' - \frac{7\left(\gamma\mu R^2\right)^3}{9216} I''' \right);$$

$$C_3 = \frac{\gamma\mu}{16\pi R^2}\left(I' - \frac{\gamma\mu R^2}{8} I'' + \frac{\left(\gamma\mu R^2\right)^2}{96} I''' \right);$$

$$C_5 = \frac{(\gamma\mu)^2}{384\pi R^2}\left(I'' + \frac{\gamma\mu R^2}{8} I''' \right);$$

$$C_5 = \frac{(\gamma\mu)^3}{18432\pi R^2} I'''\,.$$

Звідси видно, що коефіцієнти полінома (12) містять похідні струму за часом, вищий порядок яких дорівнює номеру ітерації. Коефіцієнти при похідних пропорційні до параметра $\omega\gamma\mu R^2$ в степені, що дорівнює порядку похідної.

Зазначимо, що розподіл густини струму по перерізу провідника визначають на підставі виразу

$$\delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH)\,. \tag{13}$$

Третє наближення густини струму таке:

$$\delta^{(3)}(r,t) = 2C_1(t) + 4C_3(t)r^2 + 6C_5(t)r^4 + 8C_7(t)r^6\,. \tag{14}$$

За міру виявлення поверхневого ефекту можна прийняти величину $\chi = \dfrac{\overline{\delta}^{(3)}(R)}{\overline{\delta}^{(3)}(0)}$, де $\overline{\delta}^{(3)}(r) = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\left(\delta^{(3)}(r,t)\right)^2 dt}$. Для оцінки точності ітераційної процедури (10) зіставлено значення χ, отримані на підставі (14) при

$$I = I_{\max}\sin\omega t, \tag{15}$$

з аналогічним значеннями, отриманими на підставі точного розв’язку (5), при різних значеннях kR, ($k = \sqrt{\omega\gamma\mu}$). Зіставлення (див. таблицю) свідчить про те, що похибка розрахунку зростає зі збільшенням kR, однак при $kR<2$ похибка третього наближення не перевищує 2%.

Отже, в лінійному випадку ітераційна процедура розрахунку поверхневого ефекту (6), (10) приводить до задовільних результатів для слабкого поверхневого ефекту (при $kR<2$).

Проаналізуємо поверхневий ефект для феромагнітного матеріалу.

Поширення електромагнітної енергії у феромагнітному середовищі досліджено в низці праць [1], [4]. Аналітичний розв'язок рівняння (4) отримав Л.Р. Нейман [1] у випадку, коли магнітну проникність і провідність можна апроксимувати степеневою залежністю від r.

На підставі запропонованої процедури розраховано поверхневий ефект у випадку, коли

$$B = \mu H - aH^3. \tag{16}$$

Таку апроксимацію застосовують, коли диференціальна магнітна проникність не менша від магнітної проникності вакууму μ_0, тобто $H \le \sqrt{\dfrac{\mu - \mu_0}{3a}}$. При $H = \sqrt{\dfrac{\mu - \mu_0}{3a}}$ відбувається повне насичення.

Розподіл напруженості магнітного поля вздовж радіуса перерізу провідника з урахуванням (16) описує рівняння

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H = \gamma\mu\left(1 - b\frac{H^2}{H_{\max}^2}\right)\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{17}$$

$0 \le b \le 1$.

Для слабкого поверхневого ефекту за нульове наближення до стаціонарного розв'язку (17) приймемо, як і в лінійному випадку, вираз (7). Для визначення вищих наближень можна застосувати ітераційну процедуру (3).

На підставі ітераційної процедури (3) наближення до стаціонарного розв'язку (17) набувають вигляду полінома за непарними степенями r. Визначення коефіцієнтів полінома не складне. Проте зі збільшенням номера наближення кількість членів полінома суттєво зростає через наявність у правій частині (17) нелінійності H^2. Наприклад, перше наближення містить члени до 5-го порядку включно, друге – до 17-го, а третє – до 53-го.

Визначення стаціонарного розв'язку (17) можна значно спростити, практично не втрачаючи в точності розрахунку. Спрощення пов'язане з підстановкою в (17) замість H^2 виразу, який би, з одного боку, з достатньою точністю описував розподіл магнітного поля, а, з іншого – містив би один-два степеневі члени. Опишемо один з можливих підходів.

Для лінійної задачі розподіл струму по радіусу перерізу описує функція Бесселя нульового порядку. Цей розподіл у разі слабкого поверхневого ефекту з достатньою точністю можна записати у вигляді параболічної залежності

$$\delta = \delta_0\left(1 + \alpha r^2\right),$$

де параметри δ_0, α визначені виразами

$$\alpha_k = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\delta_k}{\delta_{0_k}} - 1\right),$$

$$\delta_{0_k} = \frac{1}{2\pi R^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta_k}{\delta_{0_k}} - 1\right)\right]};$$

δ_k / δ_{0_k} – міра прояву поверхневого ефекту для заданого *kR* (перша колонка таблиці), індекс *k* означає, що δ_k, δ_{0_k}, α_k відповідають заданому *kR*.

Після нескладних математичних перетворень отримаємо, що вищі наближення визначають як стаціонарні розв'язки звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial^2 H^{(l)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H^{(l)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}H^{(l)} = \gamma\mu\left(1 - b\frac{\left[\delta_{0_k}^2\left(\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\alpha_k r^4\right)\right]}{H_{\max}^2}\right)\frac{\partial H^{(l-1)}}{\partial t}, \tag{18}$$

$0 \le b \le 1$ задає міру впливу нелінійності, l=1,2…

На підставі ітераційної процедури (18) наближення до стаціонарного розв'язку (17) набувають вигляду полінома за непарними степенями *r*. У цьому разі перше наближення містить члени до 7-го порядку включно, друге – до 13-го, а третє – до 18-го. Так само, як і для (12), коефіцієнти полінома містять похідні за часом від струму (15). Як і для (12), на підставі (13) отримано вираз для густини струму у вигляді полінома за парними степенями типу (14), за яким обчислено значення χ. Результати розрахунку χ для різних значень *kR* при $b = 1$ наведені в таблиці.

Розрахунок третього наближення

kR	Точний розв'язок лінійної задачі [1]	Лінійна задача (третє наближення)	Нелінійна задача (третє наближення)
0	1,0	1,0	1,0
0,5	1,0010	1,00098	1,00062
1,0	1,0155	1,01560	1,01000
1,5	1,0768	1,07865	1,05087
2,0	1,2286	1,24990	1,16326
2,2	1,3250	1,37157	1,24183
2,4	1,4421	1,54378	1,34770
2,5	1,5111	1,65712	1,41285
2,6	1,5830	1,79581	1,48657

Оскільки для лінійної задачі зі зменшенням *kR* точність визначення стаціонарного розв'язку за допомогою ітераційної процедури (10) зростає, а для нелінійної задачі $\mu_d \leq \mu$, то треба очікувати, що точність розрахунку нелінійної задачі за допомогою ітераційної процедури (18) не нижча, ніж точність розрахунку лінійної задачі для відповідного *kR*. Це підтверджує порівняння точності одержаних наближень з розрахунком нелінійної задачі числовим методом (із застосуванням явної різницевої схеми). У результаті числового розрахунку отримано, що при *kR*=2 $\chi = 1{,}1752$, а це свідчить про цілком задовільну точність наближень.

Зазначимо, що використання явних різницевих схем [2] у разі слабкого поверхневого ефекту приводить до надмірного подрібнення кроку за часом. Наприклад, для різницевої схеми, що відповідає задачі розрахунку параболічного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами [2, С. 226], яке за структурою збігається з рівнянням поширення електромагнітного поля, необхідна спектральна умова стійкості Неймана зводиться до нерівності

$$\frac{\tau}{h^2 \varepsilon} < \frac{1}{4},$$

де τ, h – кроки розрахунку за часом і просторовою координатою; ε – коефіцієнт при похідній за часом. Звідси видно, що в разі малого параметру ε для забезпечення стійкості розрахунку потрібно зменшувати крок за часом.

Для ілюстрації важливості вдалої апроксимації густини струму у випадку підстановки в нелінійний член рівняння (17) наведемо результати розрахунку нелінійного рівняння (17) за допомогою такого алгоритму. Перше наближення визначали на підставі процедури (3), тобто в разі підстановки замість H^2 нульового наближення (7). Далі отримане таким способом перше наближення підставляли замість H^2 у нелінійне рівняння (17) із застосуванням ітераційної процедури (3).

Розрахунок за наведеним алгоритмом потребує на порядок більше машинного часу, ніж розрахунок, результати якого наведені в четвертому стовпці таблиці. В результаті розрахунку при $kR = 2{,}0$ отримано, що $\chi = 1{,}18892$. Таке значення χ узгоджується з тим, що для лінійної задачі (див. другий і третій стовпці таблиці) побудовані наближення дають завищені значення порівняно з точним розрахунком.

Отже, зіставлення відповідних результатів розрахунку повністю підтверджує ефективність застосування розглянутої ітераційної процедури для розрахунку слабкого поверхневого ефекту і важливість вдалого вибору апроксимації розподілу густини струму з урахуванням його в нелінійному члені рівняння (17).

Розглянуто ітераційну процедуру розрахунку поверхневого ефекту у феромагнітному матеріалі; цей ефект описує параболічне рівняння. У разі слабкого поверхневого ефекту (малого параметра при похідній за часом) на кожній ітерації розрахунок поверхневого ефекту в круглому провіднику зводиться до розв’язування звичайного диференціального рівняння.

Для оцінки меж ефективного застосування розглянутої ітераційної процедури розраховано поверхневий ефект при постійній магнітній проникності і для феромагнітного матеріалу при кубічній апроксимації $B(H)$. За однакової сили струму в провіднику прояв поверхневого ефекту (нерівномірність розподілу густини струму по перерізу провідника) у феромагнітному матеріалі менший, ніж для лінійної задачі при постійній магнітній проникності, яка дорівнює максимальній диференціальній для нелінійної задачі.

Ітераційна процедура розрахунку поверхневого ефекту приводить до задовільних результатів у разі слабкого поверхневого ефекту при $kR < 2{,}5$ ($k = \sqrt{2\pi f \mu\gamma}$).

1. *Болдырев Е.А., Зихерман М.Х., Камнева Н.П.* Переменное электромагнитное поле в проводящем листе с нелинейной магнитной проницаемостью // Электричество. 1974. № 3. С. 61–67.
2. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. Введение в теорию: Учеб. пособие. М.: Наука, 1977. 440 с.
3. *Круг К.А.* Основы электротехники. Т. 2. Теория переменных токов. М.;Л.: Госэнергоиздат, 1946. 634 с.
4. *Нейман Л.Р.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. М.;Л.: Госэнергоиздат, 1949. 190 с.

CALCULATION OF THE WEAK SKIN-EFFECT IN A ROUND SECTION FERROMAGNETIC CONDUCTOR

I.Romanyshyn*, L.Synytsky**

**Karpenko Physico-Machanical Institute of NASU*
Naukova Str. 5, UA–79053 Lviv, Ukraine
romanyshyn@ipm.lviv.ua
***Ivan Franko of Lviv National University,*
Tarnavsky Str. 107, UA–79017 Lviv, Ukraine

Iterative procedure for construction sequential approximation to steady state solution of parabolic partial differential equation with a small parameter at derivative on time is considered. This procedure is applied to the analysis of skin-effect in a round ferromagnetic conductor. On each iteration as the stationary solution of the parabolic equation is accepted a solution of the ordinary differential equation. Good agreement with exact solution in the case when μ=const permits to assert the effectiveness of the method for calculation for ferromagnetic conductor in the case of weak skin-effect. In the case of the nonlinear problem exactness of the method was confirmed by comparing with numerical solution.

Key words: skin-effect, ferromagnetic conductor, iterative procedure.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.2004
Прийнята до друку 01.07.2004