ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2004. Вип. 57. С. 12-18 *2004. Is. 57. P. 12-18*

УДК 621.373

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МАКРОМОДЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДРУГОГО МЕТОДУ ЛЯПУНОВА

Я. Матвійчук

Національний університет ”Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Розглянуто теоретичне обґрунтування методу забезпечення збіжності розв’язку математичної моделі автономної системи до заданого розв’язку за допомогою другого методу Ляпунова. Для моделі автогенератора забезпечені умови “м’якого” збудження коливань.

Ключові слова: математичне моделювання, автогенератор, регуляризація, другий метод Ляпунова.

ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ

Нехай математична модель автономної системи задана у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dy_1/dt = y_2; \\ dy_2/dt = y_3; \\ \vdots \\ dy_n/dt = f(y_1, y_2, \ldots, y_n; \overline{a}); \end{cases} \qquad (1)$$

де нелінійна функція $f(Y;\overline{a})$ неперервна, Y=(y_1, y_2,…, y_n), а вектор $\overline{a}$ містить параметри.

У [2] з’ясовано, що система (1) застосовна до моделювання широкого класу систем із зосередженими сталими параметрами.

Нехай задано деяку вектор-функцію $\tilde{Y}(t) = (\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \ldots, \tilde{y}_n(t));\ t \in (t_0, T)$. Тоді ідентифікація математичної моделі (1), розв’язок якої близький до заданої вектор-функції, має вигляд

$$\min_{\overline{a}} \int_{t_0}^{T} \left\| f(\tilde{Y}(t);\overline{a}) - \frac{d\tilde{y}_n(t)}{dt} \right\| dt. \qquad (2)$$

Якщо $f(\tilde{Y};\overline{a})$ апроксимувати в лінійному евклідовому просторі базисних функцій $\varphi_i(\tilde{Y}(t))$, $i = \overline{1,m}$, то існує єдиний розв’язок задачі ідентифікації

$$\min_{\bar{a}} \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(\tilde{Y}(t)) - \frac{d\tilde{y}_n(t)}{dt} \right)^2 dt \ . \tag{3}$$

На практиці неперервна задача (3) замінюється дискретною внаслідок дискретизації неперервної множини (t_0,T):

$$t \in (t_0, T) \Leftrightarrow t_0 \le t_k \le T;\ k = \overline{1, K}\ .$$

Звідси випливає дискретна задача ідентифікації

$$\min_{\bar{a}} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(\tilde{Y}(t_k)) - \frac{d\tilde{y}_n(t_k)}{dt} \right)^2 . \tag{4}$$

Розв'язок дискретизованої задачі (4) полягає у розв'язку в квадратичній метриці прямокутної системи лінійних алгебричних рівнянь відносно вектора коефіцієнтів апроксимації $\bar{a}$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(\tilde{Y}(t_k)) = \frac{d\tilde{y}_n(t_k)}{dt};\ \ k = \overline{1, K}\ . \tag{5}$$

Завжди існує єдиний розв'язок рівнянь (5).

Задачі ідентифікації (2)–(5) є некоректними. Це означає, що їхні розв'язки неприпустимо сильно залежать від похибок $\tilde{y}_n(t)$ та від похибок обчислень. Як наслідок, розв'язок системи (1) може бути як завгодно далеким від заданого вектора $\tilde{Y}(t)$.

Регуляризація за Тіхоновим сумісно з методом редукції апроксимуючого полінома [3, 4] (комбінована регуляризація) забезпечує коректність задачі ідентифікації. Однак область збіжності до розв'язку $\tilde{Y}(t)$ може бути надто малою. Справді, ідентифікації (2)–(5) контролюють поведінку апроксимованої функції лише вздовж траєкторії $\tilde{Y}(t)$ у фазовому просторі.

За допомогою ідей другого методу Ляпунова можна задавати бажану область збіжності розв'язку системи (1).

Побудуємо функцію Ляпунова стосовно відхилень розв'язку системи (1) $Y(t)$ від заданого вектора $\tilde{Y}(t)$, щоб вона була всюди додатною, крім точок $Y(t) = \tilde{Y}(t)$, де вона нульова [1].

Вибір функції Ляпунова є дуже складним завданням у разі пошуку області стійкості системи [1]. В нашому випадку область стійкості (тобто область збіжності до розв'язку $\tilde{Y}(t)$) не визначена, а задана. Тому вибір функції Ляпунова суттєво спрощений. Задовільний зразок такої функції – неповна квадратична форма:

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i(t) - \tilde{y}_i(t) \right)^2 . \tag{6}$$

За такого вибору функції Ляпунова область збіжності може охоплювати весь фазовий простір.

Для збіжності $Y(t)$ до $\tilde{Y}(t)$ у деякій області Ω фазового простору системи (1) достатньо, щоб похідна функції Ляпунова (6) за рівняннями руху (1) була від'ємна в цій області, крім точок $Y(t)=\tilde{Y}(t),$ де вона повинна бути нульовою [1]:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(Y)}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dt}<0 \quad при \quad Y\in\Omega; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(Y)}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dt}=0 \quad при \quad Y=\tilde{Y}. \tag{8}$$

Умова (8) для функції Ляпунова (6) завжди виконується.

Обчислимо ліву частину нерівності (7) згідно з (6) та (1):

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i(t)-\tilde{y}_i(t)\right)\cdot y_{i+1}(t)+\left(y_n(t)-\tilde{y}_n(t)\right)\cdot f(Y,\overline{a})\underset{Y\in\Omega}{<}0. \tag{9}$$

Умова (9) у дискретному варіанті має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i(t_k)-\tilde{y}_i(t_k)\right)\cdot y_{i+1}(t_k)+\left(y_n(t_k)-\tilde{y}_n(t_k)\right)\cdot f(Y(t_k),\overline{a})\underset{Y(t_k)\in\Omega}{<}0. \tag{10}$$

З нерівностей (10) можна отримати додаткові алгебричні рівняння, якими треба доповнити ідентифікаційну систему (5). Для цього виберемо таку функцію $\beta(Y)$, щоб $\beta(Y)<0$ при $Y\epsilon\Omega$ та $\beta(Y)\to 0$ при $Y\to\tilde{Y}$. Прикладом такої функції є функція Ляпунова (6) з від'ємним знаком:

$$\beta(Y)=-\sum_{i=1}^{n}\left(y_i(t)-\tilde{y}_i(t)\right)^2. \tag{11}$$

Прирівнявши ліві частини нерівностей (10) до функції (11), отримаємо систему рівнянь, що еквівалентна системі нерівностей (10) у сенсі нашої задачі:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i(t_k)-\tilde{y}_i(t_k)\right)\cdot y_{i+1}(t_k)+\left(y_n(t_k)-\tilde{y}_n(t_k)\right)\cdot f(Y(t_k),\overline{a})=\beta(Y(t_k));\ Y(t_k)\in\Omega.$$

Розв'яжемо отримані рівняння відносно апроксимованої функції $f(Y(t_k),\overline{a})=\sum_{i=1}^{m}a_i\varphi_i(Y(t_k))$:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\varphi_i(Y(t_k))\underset{Y(t_k)\in\Omega}{=}\frac{\beta(Y(t_k))-\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i(t_k)-\tilde{y}_i(t_k)\right)\cdot y_{i+1}(t_k)}{y_n(t_k)-\tilde{y}_n(t_k)}. \tag{12}$$

Рівняння (12) мають таку ж структуру, що й рівняння (5). Сумісний розв'язок рівнянь (5) та (12) забезпечує розширення області збіжності моделі до заданого розв'язку.

Залишається вибрати ті точки $Y(t_k)$ в межах області Ω, у яких бажано контролювати збіжність розв'язку системи (1) $Y(t)$ до заданого розв'язку $\tilde{Y}(t)$.

Чим більше таких точок, тим надійніше гарантована збіжність до заданого розв'язку $\tilde{Y}(t)$ в області Ω, але в цьому разі погіршується якість апроксимації (5). Треба також уникати точок, що лежать близько до траєкторії $\tilde{Y}(t)$ або на ній. Тоді зумовленість сумарної алгебричної системи, складеної з рівнянь (5) та (12), не буде погіршуватись.

ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ

Перевірка викладеного методу забезпечення збіжності на тестовому прикладі автогенератора дала змогу виявити надійну збіжність розв'язку математичної моделі до заданого розв'язку в межах обраної області.

З використанням методу оберненої лінійної підсистеми [2] та комбінованого методу регуляризації [3, 4] побудована математична модель автогенератора у вигляді системи двох диференціальних рівнянь з нелінійною функцією. Рівняння моделі такі:

$$\begin{cases} dy_1/dt = y_2; \\ dy_2/dt = \omega^2(f(y_1, y_2) - y_1); \end{cases}$$
$$f(y_1, y_2) = \sum_{i,j=0}^{5} a_{ij} y_1^i y_2^j; \quad i + j \le 5. \tag{13}$$

На рис. 1 показані електрична схема автогенератора та еквівалентна електрична схема його математичної моделі (13).

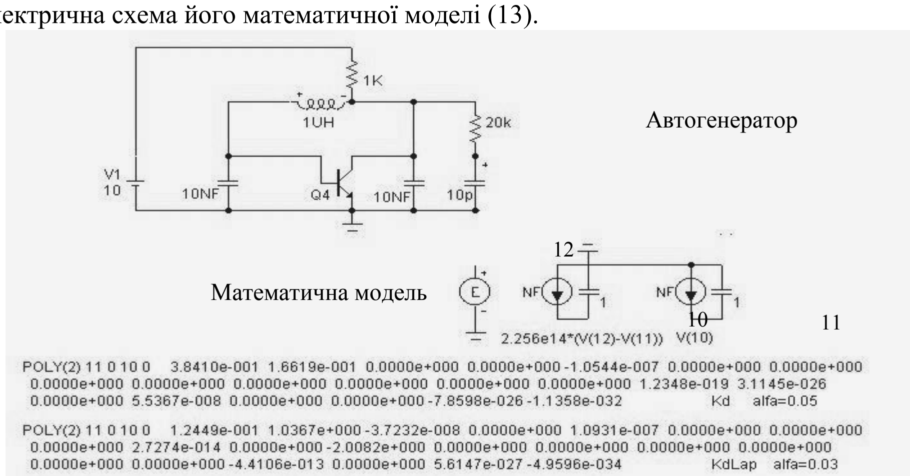

Рис. 1. Автогенератор та його математична модель мовою MicroCap-5.

Диференціальні рівняння моделі (13) зображені на рис. 1 двома інтегрувальними ланками з лінійних керованих джерел струму NF та ємностей по 1F. Змінними стану y_1 та y_2 є напруги вузлів 11 та 10. Нелінійна функція $f(y_1,y_2)$ є степеневим поліномом п'ятого степеня від двох змінних стану і представлена нелінійним керованим джерелом напруги E (напруга вузла 12).

Два варіанти нелінійної поліноміальної функції, показані на рис. 1, відповідають:

методу комбінованої регуляризації (позначка “Kd”);

методу комбінованої регуляризації із застосуванням другого методу Ляпунова (“KdLap”).

Вихідний сигнал генератора – це напруга на ємності 10р. Вихідний сигнал моделі – це напруга вузла 11. На рис. 2 показані вихідні сигнали генератора та моделі з першим варіантом нелінійної функції.

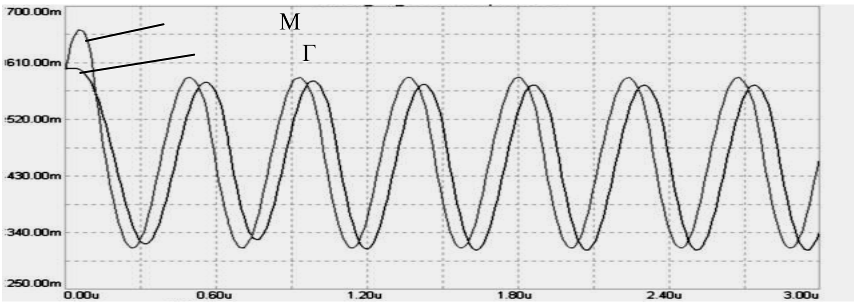

Рис. 2. Вихідні сигнали генератора та моделі.

Аналоги рівнянь (5) для моделі (13), за якими виконували ідентифікацію першого варіанта нелінійної функції, мають вигляд

$$\sum_{i,j=0}^{5} a_{ij}\tilde{y}^{i}(t_k)\left(\frac{d\tilde{y}(t_k)}{dt}\right)^{j} = \frac{d^2\tilde{y}(t_k)}{dt^2}/\omega^2 + \tilde{y}(t_k); \tag{14}$$
$$i + j \le 5;\ \omega^2 = 2.256_{10}14;\ k = \overline{1,400},$$

де $\tilde{y}(t_k)$ позначає відлік вихідного сигнала генератора в k-й момент часу.

На рис.3 показано заданий граничний цикл на фазовій площині в координатах вихідного сигналу та його похідної, а також набір точок початкових умов моделі з першим варіантом нелінійності, за яких інтеграл моделі збігається до вихідного сигналу генератора.

З рис. 3 видно, що для моделі з першим варіантом нелінійності, одержаним лише комбінованим методом регуляризації, існує значна область Ω початкових умов, за яких перехідний процес моделі загасає і не відтворює заданий вихідний сигнал генератора. Це відповідає так званому жорсткому режиму збудження.

Нехай треба сформувати модель, яка не матиме цієї області, тобто відповідатиме умові “м’якого” збудження. Цю задачу розв’яжемо із застосуванням описаного вище методу.

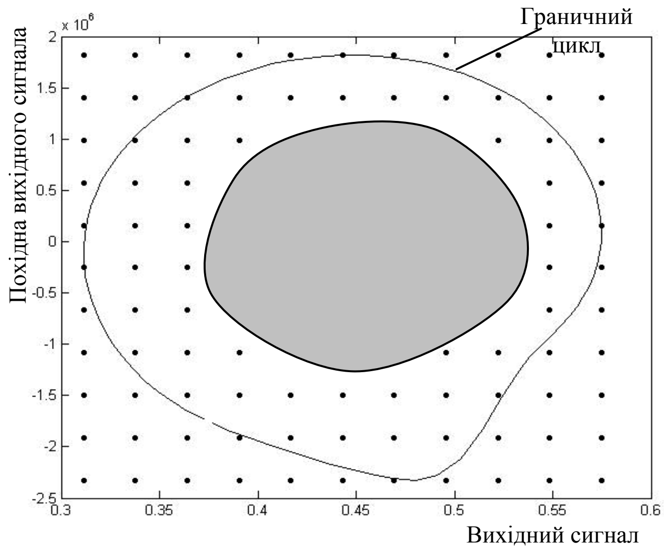

Рис. 3. Точки – початкові умови моделі, за яких перехідний процес збігається до заданого вихідного сигналу генератора. В області Ω коливання загасають.

Збудуємо функцію Ляпунова згідно з (6) для граничного циклу рис. 3, але із нормованою похідною. Вигляд цієї функції показаний на рис. 4.

Аналоги рівнянь (12) для моделі (13), що ними доповнено систему (14) для забезпечення режиму “м’якого” збудження, записують так:

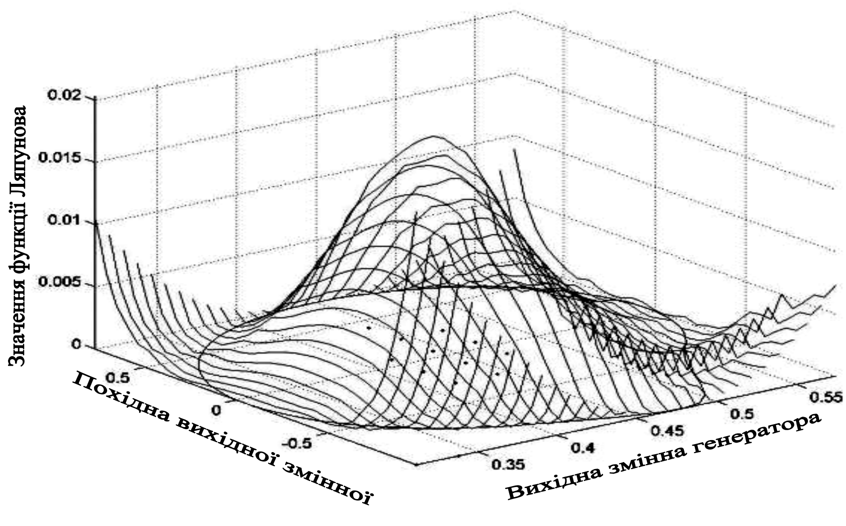

Рис. 4. Вигляд поверхні, що відповідає функції Ляпунова (6).
У позначених точках складені додаткові рівняння (15) для “м’якого” збудження.

$$\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\le 5}}^{5} a_{ij} y_1^i(t_k) y_2^j(t_k) = (-\left(y_1(t_k)-\tilde{y}_1(t_k)\right)^2 - \left(y_2(t_k)-{d\tilde{y}_1(t_k)}/{dt}\right)^2 - \\ -\left(y_1(t_k)-\tilde{y}_1(t_k)\right)\cdot y_2(t_k)) \Big/ \left(y_2(t_k)-{d\tilde{y}_1(t_k)}/{dt}\right); \quad Y(t_k)\in\Omega, \tag{15}$$

де $(\tilde{y}_1(t_k), d\tilde{y}_1(t_k)/dt)$ – точка граничного циклу, найближча до точки $(y_1(t_k), y_2(t_k))$.

На рис. 4 позначені точки фазової площини, в яких утворені додаткові рівняння (15), що забезпечують режим “м’якого” збудження згідно з викладеним методом забезпечення збіжності розв’язку моделі до заданого розв’язку.

Сумісним розв’язом 400 основних рівнянь (14) та 11 додаткових (15) знайдені коефіцієнти нелінійної функції, показані в другому варіанті на рис. 1. Модель з такою нелінійною функцією не має внутрішньої області початкових умов, для яких періодичний режим не збуджується, тобто відповідає генератору з “м’яким” збудженням.

1. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М: Наука, 1967. 224 с.
2. *Матвійчук Я.М.* Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія та практика. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І.Франка, 2000. 215 с.
3. *Матвійчук Я., Курганевич А.* Регуляризація задачі ідентифікації макромоделей нелінійних динамічних систем методом редукції апроксимаційного базису // Теор. електротехніка. 2000. Вип.55. С. 31–36.
4. *Матвійчук Я.М., Олива О.В.* Синтез математичних моделей перервного генератора із використанням чисельних методів // Техн. електродинаміка. 2002. Ч. 4. С. 17–20.

REGULARIZATION OF MATHEMATICAL MACROMODELS WITH THE HELP OF THE SECOND METHOD OF LYAPUNOV

Ja. Matvijchuk

Lviv Polytechnic National University
St.Bandery Str. 12, UA–79013 Lviv, Ukraine

Theoretical substantiation of a method for providing the convergence of a solution of mathematical model of an independent system to a given solution with the help of the second method of Lyapunov is considered. The method is illustrated by model of the self-oscillator, for which the conditions of "soft" excitation of oscillations are provided.

Key words: chopping generator, model, autonomous system.

Стаття надійшла до редколегії 01.11.2003
Прийнята до друку 01.06.2004