

УДК 621.372

## НЕПЕРЕРВНА МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ФАЗОВОГО АВТОПІДСТРОЮВАННЯ ЧАСТОТИ У РАЗІ ІСНУВАННЯ КОВЗНОГО РЕЖИМУ

І. Романів, Л. Синицький

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна  
romaniv@rd.wups.lviv.ua*

Розглянуто неперервну модель цифрового фазового автопідстроювання частоти другого порядку без усереднювальних лічильників. Проаналізовано роботу такої системи за різних змін вхідної фази. Виведено умови існування ковзних рухів. Побудовано фазові траєкторії в разі ковзних рухів. Зазначено межі існування цих рухів.

*Ключові слова:* ковзний рух, неперервна модель, система цифрового фазового автопідстроювання частоти.

Дослідження ковзних рухів у цифрових системах фазової синхронізації потребує побудови таких моделей, які б максимально точно відображали поведінку систем цифрового фазового автопідстроювання у ковзному режимі. Це дасть змогу аналітично оцінити динамічні характеристики досліджуваної системи та оптимізувати її структуру відповідно до вхідного сигналу.

Блок-схема цифрового фазового автопідстроювання (ЦФАП) показана на рис. 1. Цифровий фазовий детектор видає сигнал, пропорційний до  $\text{sign}(\varphi_{\text{вх}} - \varphi_{\text{вих}})$ , що

отримують у дискретні моменти часу  $T = \frac{1}{f_0}$ . Цей сигнал змінює фазу вихідного

сигналу на кут  $\Delta\varphi$  (пропорційна ланка), й тут одночасно відбувається його підсумовування у лічильнику перетворювача код – частота (інтегрувальна ланка). Цей перетворювач видає послідовність імпульсів, частота яких визначена значенням (з врахуванням знака) лічильника. Зміна фази вихідного сигналу залежить від суми сигналів пропорційної та інтегрувальної ланок на пристрої додавання–віднімання імпульсів. Фазовертач формує вихідний сигнал, а фазу вхідного сигналу можна отримати з коду лічильника  $N_g$ .

Тоді рівняння неперервної системи, що описує ЦФАП, можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = b \cdot \text{sign}(y), \tag{1}$$

де  $x$  – значення коду, що накопичується в лічильнику перетворювача;

$y$  – розузгодження, яке дорівнює  $\varphi_{\text{вх}} - \varphi_{\text{вих}}$ ,

$$\frac{dy}{dt} = -a \cdot \text{sign}(y) - c \cdot x + \frac{d\varphi_{\text{вх}}}{dt} \tag{2}$$

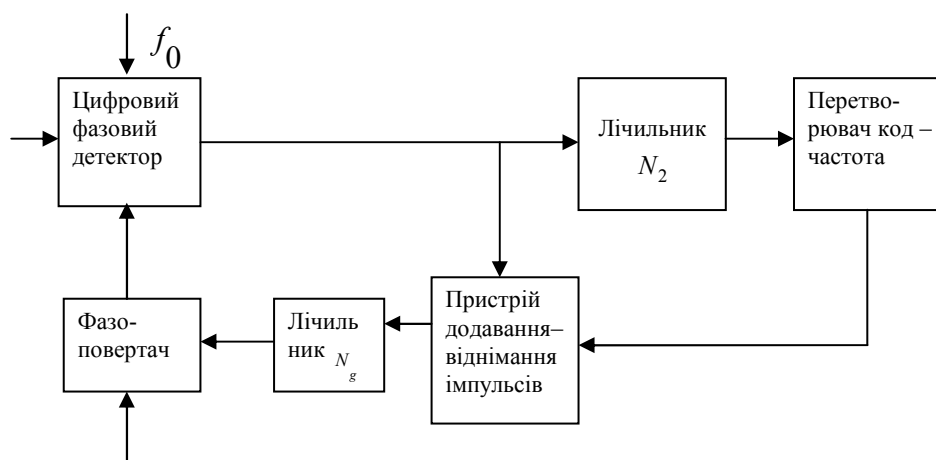


Рис. 1. Блок-схема системи ЦФАП.

Коефіцієнти  $a$ ,  $b$  і  $c$  визначають з параметрів системи, а саме:

$$a = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_0}{N_g}, \quad b = f_0, \quad c = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_0}{N_g \cdot N_2}.$$

Систему (1) і (2) також можна записати у загальному вигляді як

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + \frac{d\varphi_{\text{вх}}}{dt}. \tag{3}$$

Динамічна система вигляду (1) і (2) допускає в деяких точках фазової площини розриви правих частин  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$ . У загальному випадку [2] точки розриву функцій  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  утворюють на площині  $(x, y)$  криві, які називають лініями розриву. Систему (3) можна записати як сукупність двох аналітичних систем:

$$\frac{dx}{dt} = P_+(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_+(x, y) + \frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}}; \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = P_-(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_-(x, y) + \frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}}. \quad (5)$$

Поведінка системи на лінії розриву є невизначеною. В розривних системах виникають рухи, що визначені не системою (4) або системою (5), а деякою третьою системою, яка описує рух тільки на лінії розриву. Такі рухи прийнято називати ковзними, їх описують диференціальними рівняннями першого порядку, які можна отримати безпосередньо з (1) і (2). Система (1) і (2) є такою, що праві частини рівнянь розривні при  $y = 0$ .

Розглянемо поведінку системи в околі точки  $y = 0$  для випадків  $y > 0$  і  $y < 0$ .

Якщо  $y > 0$ , то  $\frac{dx}{dt} = b$  і  $\frac{dy}{dt} = -a - c \cdot x + \frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}}$ . Для досягнення точки  $y = 0$

необхідно, щоб  $y < 0$ . Отже,  $-a - c \cdot x + \frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}} < 0$ . З іншого боку, щоб

продовжувався рух для  $y < 0$ , повинна зберегтись умова  $y < 0$ . Маємо  $\frac{dx}{dt} = -b$  і

$$\frac{dy}{dt} = a - c \cdot x + \frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}} \text{ або } a - c \cdot x + \frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}} < 0.$$

Для нормального перемикання  $\frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}}$  повинно задовольняти нерівності

$$\frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}} < a + c \cdot x;$$

$$\frac{d\varphi}{dt}{}_{\text{ex}} < -a + c \cdot x,$$

де  $x$  – значення змінної при  $y = 0$ .

З цих умов випливає жорсткіша умова для нормального перемикання у точці  $y = 0$

$$x > \frac{1}{c} \cdot \left( a + \frac{d\varphi}{dt} \frac{ex}{dt} \right). \quad (6)$$

Нормальне перемикання від від'ємних значень  $y$  до додатних потребує збереження нерівності  $y > 0$  незалежно від знака  $y$  в околі  $y = 0$ . У цьому випадку нерівність відносно  $x$  має вигляд

$$x < \frac{1}{c} \cdot \left( -a + \frac{d\varphi}{dt} \frac{ex}{dt} \right). \quad (7)$$

У разі порушення хоч одного з цих співвідношень нормальне перемикання неможливе. Напрямок фазових траєкторій в околі  $y = 0$  показаний на рис. 2. Як

бачимо, для  $\frac{1}{c} \left( -a + \frac{d\varphi}{dt} \frac{ex}{dt} \right) < x < \frac{1}{c} \left( a + \frac{d\varphi}{dt} \frac{ex}{dt} \right)$  фазові траєкторії при  $y > 0$  і

$y < 0$  в околі  $y = 0$  напрямлені назустріч. Це свідчить про виникнення ковзних рухів, для яких характерно те, що  $y(t)$  є знакозмінною в околі точки  $y = 0$ , і

можна прийняти гіпотезу, що на лінії розриву  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Подальші розрахунки доводять правильність цієї гіпотези.

Викладені міркування стосуються необмеженого значення змінної  $x$ , що відповідає необмеженості об'єму інтегрального лічильника. Якщо ввести подібне обмеження, тобто  $|x| \leq N_2$ , то рівняння (1), (2) необхідно доповнити.

Рівняння (1) матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} b \cdot \text{sign}(y), |x| < N_2; \\ 0, |x| = N_2. \end{cases}$$

Тоді умови існування ковзного режиму треба доповнити випадком  $|x| = N_2$ . Для нормального перемикання повинна виконуватись умова (у разі зменшення  $y(t)$ )

$-a - c \cdot N_2 + \frac{d\varphi}{dt} \frac{ex}{dt} < 0$ , або  $\frac{d\varphi}{dt} \frac{ex}{dt} < a + c \cdot N_2$ , а у випадку зростання  $y(t)$  маємо

$$\frac{d\varphi}{dt} \frac{ex}{dt} < -a + c \cdot N_2.$$

Досі ми розглядали умови виникнення ковзного режиму, якщо  $y$  і  $x$  змінюються неперервно. Проте в разі дискретної зміни цих значень, коли

визначений крок дискретизації за рівнем  $\Delta$ , поняття ковзного режиму необхідно дещо уточнити.

Якщо

$$\left| c \cdot x = \frac{d\varphi_{\text{ex}}}{dt} \right| < \left| \frac{b}{a} \cdot \frac{dx}{dt} \right|, \text{ то знак похідної } \frac{dy}{dt} \text{ змінюється в разі зміни знака } y.$$

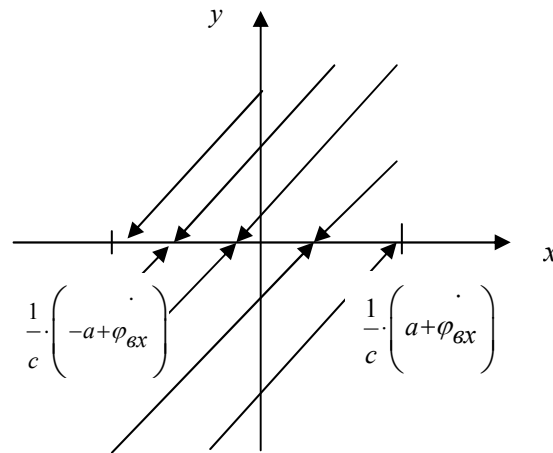


Рис. 2. Фазові траєкторії в разі нормального та ненормального перемикань

На фазовій площині  $(x, y)$  це відображене тим, що напрям фазових траєкторій на прямій  $y = 0$  протилежний  $\frac{dy}{dt}$  на правій та лівій півплощинах.

Тому нормальне перемикання неможливе, і в цьому випадку загальноприйнятим є припущення про існування ковзного режиму, коли рух відбувається вздовж прямої  $y = 0$ . З погляду роботи ЦФАП такий режим бажаний тому, що відповідає нульовій похибці слідкування.

Із рівнянь (1) і (2) отримаємо закон руху в системі на лінії розриву [1]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{b} \cdot \left[ c \cdot x + \frac{d\varphi_{\text{ex}}}{dt} \right].$$

З урахуванням значення коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  і  $c$  маємо  $\tau^{-1} = \frac{f_0}{N_2}$ ,

де  $\tau$  – стала часу системи, яка відповідає ковзному режиму,

а  $\frac{f_0}{N_2}$  – мінімальна частота імпульсів, що відповідає значенню  $x = 1$ .

Отже, в ковзному режимі стала часу системи  $\tau = \frac{N_2}{f_0}$ .

Для системи, яку розглядаємо, ковзний режим є номінальним.

Проаналізуємо режим роботи у випадку лінійної зміни вхідного сигналу  $\varphi_{\text{вх}}(t) = k \cdot t$ . Межі ковзного режиму в цьому випадку мають вигляд

$$\frac{1}{c}(-a + k) < x < \frac{1}{c}(a + k).$$

Тоді для ковзного руху

$$\tau \cdot \frac{dx}{dt} + x = \frac{k}{c}.$$

В усталеному режимі  $x_{\text{ков}} = \frac{k}{c}$ . Виконані експерименти дають повний збіг з розрахунком. Ковзний режим зникає, коли  $x$  досягає значення  $x_{\text{ков}}$ .

Розглянемо випадок гармонічного закону зміни вхідного сигналу  $\varphi_{\text{вх}}(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ . Тоді

$$\tau \cdot \frac{dx}{dt} + x = \frac{\omega \cdot \varphi_0}{c} \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

де  $\tau = \frac{a}{b \cdot c}$ .

У стаціонарному режимі одержимо розв'язок

$$x = \frac{\omega \cdot \varphi_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \alpha),$$

де  $\text{tg} \alpha = \omega \cdot \tau$ .

Для існування ковзного руху упродовж стаціонарного режиму повинна виконуватись умова

$$\frac{\omega \cdot \varphi_0}{c} \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \alpha) - \cos \omega \cdot t \right| < \frac{a}{c}.$$

Виконаємо нескладні математичні перетворення й отримаємо нерівність

$$\frac{\omega \cdot \varphi_0}{c} \cdot \sin \alpha < \frac{a}{c}.$$

З цієї нерівності випливає умова збереження ковзного режиму

$$\frac{\omega^2 \cdot \tau \cdot \varphi_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}} < a.$$

Отже, доведено, що для моделі системи ЦФАП у разі астатизму першого порядку головним режимом роботи є ковзний рух. Визначено параметри ковзного руху в неперервній моделі ЦФАП та доведено, що для дискретної моделі зберігаються головні властивості ковзного режиму. Виконані числові експерименти підтверджують висловлені гіпотези.

1. Гаушус Э.В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. С. 368.
2. Романів І.С., Синицький Л.А. Неперерывная модель цифровой системы ФАПЧ // Теор. электротехника. 1989. Вып. 46. С.146–148.
3. Цифровые системы фазовой синхронизации / Под ред. М.И. Жодзишского. М.: Сов. радио, 1980. 208 с.

### CONTINUOUS MODEL OF DIGITAL PLL IN THE CASE OF EXISTENCE OF SLIDING MOTION

I. Romaniv, L. Sinitsky

*Ivan Franko of Lviv National University,  
Tarnavsky Str. 107, UA-79017 Lviv, Ukraine  
e-mail: romaniv@rd.wups.lviv.ua*

The time-continuous model of the second-order PLL without averaging is investigated. There has been carried out the analysis of such a system for different changes of input phase. Conditions of existence of sliding motion are deduced. Phase trajectories of sliding motion are obtained. A condition of existence of this motion is indicated.

*Key words:* sliding motion, time-continuous model, digital PLL.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.2004  
Прийнята до друку 01.07.2004