УДК 621.372.061

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ЗА НАЯВНОСТІ СУХОГО ТЕРТЯ

Л. Синицький, Т. Яворська

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна
shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

Визначено параметри коливальної системи, для яких перехід через зону застою відбувається миттєво.

Ключові слова: коливальна система, періодичний режим, зона застою.

Вивчення дії сухого тертя на динаміку коливальних систем розпочато ще в XIX ст. з огляду на дослідження стійкості систем автоматичного керування [6, 8]. Вільні коливання за наявності сухого тертя в лінійному осциляторі дослідив акад. О.М. Крилов на початку XX ст. у монографії [3], яку потім багаторазово перевидавали. Відомі також праці про дію сухого тертя на нелінійний осцилятор – маятник у разі великих кутів відхилення [2]. Обґрунтувати існування та єдиність розв’язку рівнянь механічної системи з сухим тертям намагаються і сьогодні [4, 5]. Підходи до розгляду систем із сухим тертям з урахуванням виникнення ковзних режимів намічені в [9], а експериментальні підтвердження правильності прийнятої моделі сухого тертя наведені в [1].

Проте досі вплив сухого тертя в неавтономних системах, де виникає резонанс, залишались поза увагою, аж поки було з’ясовано, що аналогічні проблеми можна інтерпретувати в термінах теорії електричних кіл [7]. Процеси в нелінійному коливальному контурі, що містить симетричний кремнієвий стабілітрон з ідеальною вольт-амперною характеристикою (рис. 1), повністю аналогічні до механічної коливальної системи з сухим тертям. У такої схеми (рис. 2) є цікаві властивості, що мають практичне застосування.

Дослідимо систему

$$\ddot{x}+f\left(\dot{x}\right)+\omega_0^2x=bcos\left(\omega t+\alpha\right), \tag{1}$$

де $f\left(\dot{x}\right)$ описана залежністю, що відповідає сухому тертю та лінійно залежить від швидкості при $\dot{x}\neq 0$,

$$f\left(\dot{x}\right)=f_c+2\delta\dot{x} \quad \dot{x}\neq 0;$$

$$-f_c\leq f\left(0\right)\leq f_c.$$

Перехід до безрозмірного часу $\theta=\omega_0 t$ приводить до рівняння

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}+f\left(\frac{dx}{d\theta}\right)+x=a\cos\left(\nu\theta+\alpha\right);\; f\left(\frac{dx}{d\theta}\right)=f_0sign\frac{dx}{d\theta}+2\beta\frac{dx}{d\theta}, \tag{2}$$

де $\nu = \dfrac{\omega}{\omega_0}$; $a = \dfrac{b}{\omega_0^2}$; $\beta = \dfrac{\delta}{\omega_0}$; $f_0 = \dfrac{f_c}{\omega_0^2}$.

Далі безрозмірний час також позначимо через t і збережемо символ диференціювання $\dot{x} = \dfrac{dx}{d\theta}$.

Тоді (2) розпадеться на дві системи залежно від $\dot{x}$:

у зоні застою при $\dot{x} = 0$, яку назвемо S_0, маємо

$$f + x_0 = a\cos(\nu t + \alpha) \quad |f| \le f_0 ; \tag{2а}$$

за межами S_0 стани S^- ($\dot{x} < 0$), S^+ ($\dot{x} > 0$)

$$\ddot{x} + f_0 \operatorname{sign}\dot{x} + 2\beta\dot{x} + x = a\cos(\nu t + \alpha) . \tag{2б}$$

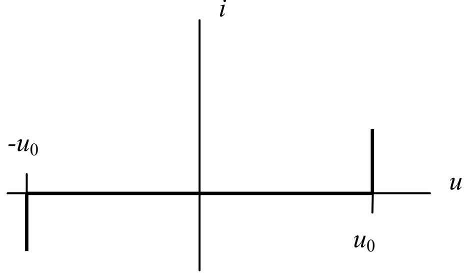

Рис. 1. Вольт-амперна характеристика стабілітрона

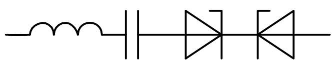

Рис. 2. Нелінійний коливальний контур

Характер процесу суттєво залежить від умов чергування S_0 і S на періоді зовнішньої дії. Нехай при $t = 0$ відбувається вхід у зону S_0 зі стану S^-, тобто розглядаємо випадок $\dot{x}(0-0) < 0$; $f\left(x(0-0)\right) = -f_0$ і $\ddot{x}(0-0) > 0$.

Тоді згідно з рівняннями руху в стані S^- маємо

$$\ddot{x}(0-0) = f_0 - x_0 + a\cos\alpha > 0 . \tag{3}$$

На вході в S_0 $\ddot{x}(0+0) = 0$, тобто $\ddot{x}$ при $t = 0$ стрибком зменшується на $\Delta\ddot{x} = f_0 - f^*$, де $f^* = f\left(\dot{x}(0+0)\right)$ – значення сили тертя у момент входження в S_0. Зрозуміло, що $-f_0 \le f^* \le f_0$. Під час руху в S_0 $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ і тому виконуються рівності

$$f(t) + x_0 = a\cos(\nu t + \alpha) \quad \text{і} \quad f^* + x_0 = a\cos\alpha . \tag{4}$$

У випадку, коли згідно з (4) $f^* > f_0$, треба вважати, що відбувається миттєвий вихід із S_0 в S^+, проте вже при $f = f_0$. Таке припущення завжди виконується у випадку вільних коливань, коли $a = 0$ і $x_0 < -f_0$.

Далі вважаємо, що такому режиму відповідає нормальне перемикання: після стану S^- починається рух у стані S^+ у момент $t = 0+0$ $\dot{x}(0+0) = 0$.

Очевидно, що нормальне перемикання виникає при $f_0 = 0$ і, можливо, при досить малих f_0. Цей режим треба дослідити.

Якщо $f^* = -x_0 + a\cos\alpha < f_0$, то рух у S_0 відбувається згідно з (4).

Згідно з (2б) руху в S^+ відповідає рівняння (при $\beta = 0$)

$$\ddot{x} + x = a\cos(\nu t + \alpha) - f_0$$

за початкових умов $t = 0,\quad x = x_0,\quad \dot{x} = 0$.

Знайдемо для розв'язку (2б)

$$x(t) = A\cos t + B\sin t - f_0 + \frac{a}{1-\nu^2}\cos(\nu t + \alpha)$$

сталі A, B згідно з початковими умовами. Отримаємо

$$x(t) = \left[f_0 - \frac{a}{1-\nu^2}\cos\alpha + x_0\right]\cos t + \frac{a\nu}{1-\nu^2}\sin\alpha\cdot\sin t - f_0 + \frac{a}{1-\nu^2}\cos(\nu t + \alpha).$$

Доцільно ввести безрозмірні величини

$$\bar{x}(t) = \left(1-\nu^2\right)\frac{x(t)}{a};\qquad \bar{f}_0 = \left(1-\nu^2\right)\frac{f_0}{a};\qquad \bar{x}_0 = \left(1-\nu^2\right)\frac{x_0}{a}.$$

Тоді

$$\bar{x} = \left(\bar{f}_0 - \cos\alpha + \bar{x}_0\right)\cos t + \nu\cdot\sin\alpha\cdot\sin t - \bar{f}_0 + \cos(\nu t + \alpha). \tag{5}$$

Якщо шуканий режим є симетричним, а перехід через зону S_0 – миттєвим, то для визначення α і x_0 треба прийняти умови

$$\bar{x}\left(\frac{\pi}{\nu}\right) = -\bar{x}_0,\quad \frac{d\bar{x}}{dt}\left(\frac{\pi}{\nu}\right) = 0.$$

Тоді згідно з (5) отримаємо два рівняння

$$\left(1 + \cos\frac{\pi}{\nu}\right)\left(\bar{x}_0 - \cos\alpha\right) + \nu\cdot\sin\frac{\pi}{\nu}\cdot\sin\alpha = \bar{f}_0\left(1 - \cos\frac{\pi}{\nu}\right);$$

$$-\sin\frac{\pi}{\nu}\left(\bar{x}_0 - \cos\alpha\right) + \nu\left(1 + \cos\frac{\pi}{\nu}\right)\sin\alpha = \bar{f}_0\sin\frac{\pi}{\nu}.$$

Розв'язок цих рівнянь відносно $\left(\bar{x}_0 - \cos\alpha\right)$ і $\sin\alpha$ дає

$$\bar{x}_0 - \cos\alpha = \frac{\nu\left[\left(1 - \cos^2\frac{\pi}{\nu}\right) - \sin^2\frac{\pi}{\nu}\right]}{\left[\left(1 + \cos\frac{\pi}{\nu}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{\nu}\right]\nu}\quad \bar{f}_0 = 0;$$

$$\sin\alpha = \frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{\nu}\right)\sin\frac{\pi}{\nu} + \sin\frac{\pi}{\nu}\left(1+\cos\frac{\pi}{\nu}\right)}{\nu\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{\nu}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{\nu}\right]} \quad \overline{f}_0 = \frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu}\cdot\overline{f}_0 .$$

Звідси

$$\overline{x}_0 = \cos\alpha \,, \tag{6}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu}\,\overline{f}_0 . \tag{7}$$

У разі наближення до резонансу, тобто $\nu \to 1$, вираз для $\sin\alpha$ доцільно виразити через f_0, тоді

$$\lim_{\nu\to 1}\sin\alpha = \frac{\frac{4}{\pi}f_0}{a} .$$

Отже, нормальне перемикання неможливе при $a < \frac{4}{\pi}f_0$.

Незважаючи на те, що $\overline{x}_0$ в разі резонансу має скінченне значення, x_0 при $\nu \to 1$ у випадку сухого тертя зростає до безмежності:

$$x_0 = \frac{a\cos\alpha}{1-\nu^2} .$$

Дія сухого тертя приводить тільки до того, що еквівалентна амплітуда зовнішньої дії зменшується за вдяки множнику $\cos\alpha$.

Зрозуміло, що для $a < f_0$ маємо у стаціонарному режимі перебування в зоні застою S_0. Можливі “екзотичні” режими виникають тільки у випадку виконання нерівностей

$$f_0 < a < \frac{4}{\pi}f_0 .$$

Якщо розглядають процес при значеннях ν, далеких від резонансу, нормальний режим перемикання неможливий при

$$\frac{1}{\nu}\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu}\cdot\overline{f}_0\right| > 1 .$$

Для ν у ділянці частот, значно вищих від резонансної, якщо прийняти $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu} \approx \frac{\pi}{2\nu}$, отримаємо умову відсутності нормального перемикання у вигляді

$$\frac{\pi}{2\nu^2}\left|1-\nu^2\right|\frac{f_0}{a} > 1 \text{, або } \frac{a}{f_0} < \frac{\pi}{2} .$$

Отже, значення $a_{\text{кр}}$, нижче якого неможливе нормальне перемикання, несуттєво збільшується порівняно з резонансним.

Ситуація значно змінюється при $\nu < 1$.

Зникнення нормального перемикання за ідеальної форми залежності сили тертя від швидкості простежується при значенні $\nu = \dfrac{1}{2k-1}$, де k – ціле додатне. В цьому випадку $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2\nu}$ прямує до безмежності, і кут α не існує при дуже великих співвідношеннях f_0 / a. Цей ефект звфіксовано також у випадку скінченного значення швидкості в зоні сухого тертя. При arctg – апроксимації сили тертя від швидкості

$$f = 2\beta \cdot \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\dot{x}}{\upsilon_0} \tag{8}$$

для $\nu = 1/3$, $\upsilon_0 = 0,1$ нормальний режим перемикання зареєстровано до значень $\dfrac{2\beta}{a} = 0,02$ (у цьому випадку 2β відіграє роль f_0, тому що при $\dot{x} >> \upsilon_0$ сила тертя прямує до значення 2β). Ефект виявляється в тому, що в околі точки $\dot{x} = 0$ з'являються коливання швидкості зі зміною знака $\dot{x}$.

Для ідеальної кусково-лінійної залежності сили тертя від швидкості це означає майже миттєвий вихід із зони застою у стан S^- (або S^+), з якого відбувся вхід у S_0.

Якщо для дослідження (2) застосувати метод гармонічного балансу, то він приведе до такого ж результату. Справді, для розв'язку у вигляді $x = X\cos\nu t$ при $f(\dot{x}) = f_0 \cdot sign\dot{x}$ маємо першу гармоніку $f(\dot{x}) = \dfrac{4}{\pi} f_0 \sin\nu t$. Тоді для визначення амплітуди коливань X отримаємо

$$\frac{16}{\pi^2} f_0^2 + \left(1-\nu^2\right)^2 X^2 = a^2 .$$

Тому для X не маємо дійсних розв'язків при $a < \dfrac{4}{\pi} f_0$. Водночас при $a > \dfrac{4}{\pi} f_0$ маємо єдиний розв'язок

$$X = \frac{1}{1-\nu^2}\sqrt{a^2 - \frac{16}{\pi^2} f_0^2} ,$$

який збігається з точним, отриманим вище.

Цей факт дає змогу використати метод гармонічного балансу для складніших випадків, де пошук точного розв'язку стає не практичним.

Вище точний розв'язок отримано при $\beta = 0$, тобто без наявності рідинного тертя. У разі застосування методу гармонічного балансу у випадку $\beta \neq 0$ жодних труднощів не виникає, і цей результат отриманий неодноразово. Для arctg - апроксимації метод гармонічного балансу дає значення

$$f(\dot{x}) = \frac{4}{\pi} f_0 \left(\sqrt{1+\upsilon_0^2} - \upsilon_0\right).$$

Зіставлення результатів розрахунку в разі ідеальної кусково-лінійної апроксимації сухого тертя і з використанням диференційованої функції (8) свідчить про добру збіжність результатів, якщо $\dot{x}_{\max} / \upsilon_0 > 10$.

---

1. *Булгаков Б.В.* Колебания. М.: ГИТТЛ, 1954. С. 891.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. л-ры, 1961. С. 777.
3. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в теоретических вопросах. М.: ГИТТЛ, 1950. С. 368.
4. *Матросов И.В.* О существовании решения уравнений механической системы с сухим трением // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 343–351.
5. *Матросов И.В.* О единственности решений уравнений движения механической системы с сухим трением // Дифф. уравнения. 2001. Том 37. № 6,.С. 744 – 751.
6. *Нелепин Р.А.* Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем. Л: Судостроение, 1967. С. 446.
7. *Рачок Р.В.* Деякі оцінки вимушених коливань у контурі з стабілітроном // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць, В 2, – Хмельницький: ТУП, 2000. С. 60–62.
8. Теория автоматического регулирования. Классики науки (Д.К. Максвелл, И.А. Вышнеградский, А. Стодола) / Ред. и комментарии акад. А.А. Андронова и чл.-кор. АН СССР И.Н. Вознесенского. М.: Изд. АН СССР, 1949. С. 430.
9. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. С. 367.

RESEARCH OF VIBRATIONS AT PRESENCE OF DRY FRICTION

L. Sinitsky, T. Javorska

Ivan Franko National University of Lviv ,
Tarnavsky Str. 107, UA–79017 Lviv, Ukraine
shmygelsky@rd.wups.lviv.ua

Parameters of oscillation system are determined in the case for instant trasition through the “dead zone”.

Key words: oscillating system, periodic mode, area of stagnation.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004
Прийнята до друку 01.06.2004