ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МІКРОЕЛЕКТРОНІКИ

УДК 579.711.3

АПРОКСИМАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ ЕФЕКТИВНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ В.М. ГЛУШКОВА

О. Гладківська

Науково-дослідний центр правової інформатики
Академії правових наук України,
вул. Саксаганського 110 В, м. Київ, Україна
gladkivska@ukr.net

Розглянуто задачі ідентифікації одного класу динамічних моделей В.М.Глушкова. Описано пошук величин, фізичний зміст яких – показники ефективності функціонування систем, які моделюють. Сформульовано функціонали відхилу, мінімізація яких дає розв'язок задачі. Наведено оцінки функціоналів відхилу, які використовують.

Ключові слова: динамічні моделі, ідентифікація, метод найменших квадратів, узагальнені функції, повна ортонормована система.

Одними з головних задач моделювання систем, що розвиваються, є задачі ідентифікації моделей та систем. Застосування інтегральних динамічних моделей до систем, що розвиваються, економічного, біологічного та екологічного типу засвідчило, що, з одного боку, в розглядуваному класі моделей важливу роль відіграють показники ефективності функціонування системи, яку моделюють, з іншого, – у процесі їхнього відшукання виникають значні труднощі. Наявність мультиплікативного ядра не дає змоги використати його для ідентифікації стандартних алгоритмів побудови моделей. Саме тому ми зацікавилися питанням знаходження характеристик, фізичний зміст яких – показники ефективності функціонування названих систем.

Типове рівняння інтегральних динамічних моделей В.М. Глушкова, ґрунтовно описаних у праці [3], має вигляд

$$m(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha(\tau,t)\cdot y(\tau)\cdot m(\tau)\cdot d\tau\,, \quad 0 \le a(t) < t\,, \quad t \in [0,T].. \tag{1}$$

У розв'язуваних задачах ідентифікації для рівняння (1) усі функції, крім показника ефективності $\alpha(\tau,t)$ функціонування системи, вважають заданими. Для стаціонарної моделі $\alpha(\tau,t) = \alpha(t-\tau)$. Треба вибрати критерій оцінювання адекватності моделі та системи, яку моделюють, знайти функцію $\alpha(\tau,t)$ шляхом мінімізації цього критерію, теоретично оцінити його мінімум для вибраного класу функцій та одержати числове значення.

Будемо використовувати такі відомі критерії оцінювання: I_1 – функціонал відхилу рівняння (1), що дорівнює квадрату гільбертової норми відхилу в просторі L_2; I_2 – оцінка математичного очікування квадрата різниці лівої і правої частин цього рівняння:

$$I_1(\alpha) = \|m - A\alpha\|^2_{L_2[0,T]}, \quad A\alpha = \int_{a(t)}^{t} \alpha(t-\tau)\cdot y(\tau)\cdot m(\tau)\cdot d\tau ;$$

$$I_2(\alpha,t) = M^*\left[m(t) - \int_{a(t)}^{t} \alpha(\tau,t)\cdot y(\tau)\cdot m(\tau)\cdot d\tau \right]^2, \qquad t\in[0,T].$$

Для знаходження функції $\alpha(\tau,t)$ використаємо метод найменших квадратів у просторі L_2. Розглянемо випадок $\alpha(\tau,t)=\alpha(t-\tau)$, тоді алгоритм наступний.

1) Вибираємо апроксимуючий багаточлен

$$\alpha(u) \approx \alpha_n(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \varphi(u) ,$$

де $u = t-\tau$; c_i — невідомі коефіцієнти; $\varphi_i(u)$ — задані координатні функції з простору L_2; $u\in[0,T]$; $i=\overline{1,n}$.

2) Знаходимо коефіцієнти c_i, $i=\overline{1,n}$, з умови

$$I_1(\alpha_n) = \int_0^T \left[m(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(t) \right]^2 dt \to \min_{\{c_i\}_{i=1}^n} ,$$

тобто із нормальної системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left(m,\psi_k\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\psi_i,\psi_k\right), \; k=\overline{1,n} ,$$

де $\psi_i(t) = \int_0^{t-a(t)} \varphi_i(u)\cdot y(t-u)\cdot m(t-u)\cdot du$, $\quad (m,\psi_k) = \int_0^T m(t)\cdot\psi_k(t)\cdot dt$,

$$(\psi_i,\psi_k) = \int_0^T \psi_i(t)\cdot\psi_k(t)\cdot dt ; \quad i,k=\overline{1,n}.$$

Нехай c_i^*, $i=\overline{1,n}$ – розв’язок цієї системи. Тоді апроксимуючий багаточлен та функціонал відхилу мають вигляд

$$\alpha_n^*(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i^* \cdot \varphi(u), \quad I_1(\alpha_n^*) = \left\| m - A\alpha_n^* \right\|^2_{L_2[0,T]} .$$

Одержано теоретичну оцінку мінімуму функціонала I_1 для диференційованих функцій.

Теорема 1. Якщо $\alpha(u)\in C^r\left[0,T\right]$, $r = 1,3,5,...$, а $\alpha_n(u)$ – алгебричний поліном $n-1$ степеня, то з точністю до головних членів відносно n справджується така оцінка мінімуму функціонала I_1:

$$\left\| m - A\alpha_n^{\,*} \right\|_{L_2[0,T]} \le \|A\| \cdot \frac{K_r \cdot \sqrt{T}}{2n^r} \cdot \omega\left(\frac{T^r}{2^r} \alpha^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right),$$

де $\|A\| \le \left[\int\limits_0^T \int\limits_{a(t)}^t |y(\tau)|^2 \cdot |m(\tau)|^2 \cdot d\tau \cdot dt \right]^{\frac{1}{2}}$; ω — модуль неперервності функції α;

K_r – сталі Фавара, $r = 1, 3, 5, \ldots$.

У випадку нестаціонарної моделі апроксимуючий багаточлен вибираємо у вигляді

$$\alpha(\tau, t) \approx \alpha_n(\tau, t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \varphi_i(\tau) \cdot \psi_i(t),$$

після чого для кожного моменту часу $t \in [0, T]$ та заданих значень функцій $m_l(t)$, $y_l(t)$, $a_l(t)$, $l = \overline{1, R}$, знаходимо невідомі коефіцієнти c_i, $i = \overline{1, n}$, з умови мінімізації критерію

$$I_2(\alpha_n, t) = \frac{1}{R} \sum_{l=1}^R \left[m_l(t) - \int\limits_{a_l(t)}^t \alpha_n(\tau, t) \cdot y_l(\tau) \cdot m_l(\tau) \cdot d\tau \right]^2,$$

де l — номер досліджуваного об'єкта, R — їхня кількість.

Одержано оцінки мінімумів критерію $I_2(\alpha, t)$ та функціонала $\overline{I}_2(\alpha) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T I_2(\alpha, t) \cdot dt$ для деяких класів диференційованих функцій α. Знайдено також теоретичні оцінки мінімумів критеріїв I_1 та I_2 з урахуванням обмежень $\alpha \ge 0, \alpha_n \ge 0$. Ці результати та доведення теореми 1 детально описано в [1].

Розв'язок інтегральних рівнянь часто існує не в звичайних класах функцій, а в узагальнених. Щоб знайти наближення для таких узагальнених розв'язків методом найменших квадратів, треба мати приклади повних систем узагальнених функцій, які просто обчислюють. Побудуємо один з таких прикладів.

Наведемо необхідні визначення і позначення, додержуючись [4].

Нехай $C^1[0, T]$ — множина неперервних, диференційованих на $[0, T]$ функцій $x(\tau)$, для яких

$$x(\tau)\big|_{\tau=T} = \frac{dx}{d\tau}\big|_{\tau=0} = 0, \quad (x, y)_1 = \int\limits_0^T \left(\frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dy}{d\tau} \right) \cdot d\tau;$$

$$\|x\|_1 = \left(\int\limits_0^T \left| \frac{dx}{d\tau} \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

а W^{+1} — поповнення множини $C^1[0, T]$ за нормою (2).

Нехай $x(\tau) \in L_2$, $y(\tau) \in W^{+1}$, $\tau \in [0, T]$. Позначимо через W^{-1} поповнення простору L_2 за нормою:

$$\|x\|_{-1} = \sup_{y\neq 0, y\in W^{+1}} \frac{1}{\|y\|_1} \left| \int_0^T x(\tau)\cdot y(\tau)\cdot d\tau \right| .$$

Як зазначено, наприклад, у [3], дельта-функцію δ можна розглядати як елемент простору W^{-1}, і для $x \in W^{-1}$ виконуються співвідношення

$$\|x\|_{-1} = \sup_{y\neq 0, y\in W^{+1}} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|_1} , \qquad \langle x, y\rangle = \lim_{i\to\infty} \int_0^T x_i(\tau)\cdot y(\tau) d\tau ,$$

де $x_i \in L_2$, причому $\|x_i - x\|_{-1} \to 0$, якщо $i \to \infty$.

Позначимо через D оператор диференціювання $\frac{d}{d\tau}$ (маємо на увазі похідну за Соболєвим). Оператор D відображає простір W^{+1} на L_2, причому виконується рівність $\|Dy\|_{L_2} = \|y\|_1$, а оператор диференціювання $D^* = -\frac{d}{d\tau}$ – простір L_2 на W^{-1}, тобто $\|D^* X\|_{-1} = \|X\|_{L_2}$ [3].

Розділимо інтервал $[0, T]$ на n підінтервалів довжиною $h_n = T / n$ і приймемо $\tau_k^{(n)} = k\cdot T / n = k\cdot h_n$, $k = \overline{0, n}$; $e_k^{(n)}(\tau) = \delta(\tau - \tau_k^{(n)})$, $\tau \in [0, T]$, $k = \overline{0, n-1}$. Будемо використовувати інтегральний модуль неперервності функції з простору L_2 [4]:

$$\omega_2(X, h_n) = \sup_{0<\gamma\le h_n} \left(\int_0^T |X(u+\gamma) - X(u)|^2 \, du \right)^{\frac{1}{2}} , \quad X \in L_2 , \; 0 \le h_n \le T .$$

Справджується таке твердження.

Теорема 2. Нехай $x \in W^{-1}$, $X \in L_2$ і $D^* X = x$. Існують такі числа $\alpha_k^{(n)}$, що

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \cdot \delta(\tau - \tau_k^{(n)}) \right\|_{-1} \le \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \omega_2(X, h_n) , \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доведення теореми 2 наведено в [5].

Як наслідок, одержимо, що система узагальнених функцій $\left\{ \delta(\tau - \tau_k^{(n)}) \right\}$ є повною в просторі W^{-1}. Крім того, за допомогою алгоритму Шмідта в просторі W^{-1} можна побудувати ортонормовану систему функцій $\left\{ \tilde{e}_k^{(n)}(\tau) \right\}$, еквівалентну системі $\left\{ e_k^{(n)}(\tau) \right\}$, $k = \overline{1, n}$, яка має такий вигляд:

$$\tilde{e}_1^{(n)}(\tau) = \frac{\delta(\tau - \tau_1^{(n)})}{\sqrt{T - \tau_1^{(n)}}} ;$$

$$\tilde{e}_k^{(n)}(\tau) = \frac{\sqrt{T - \tau_{k-1}^{(n)}} \cdot \delta(\tau - \tau_k^{(n)})}{\sqrt{(T - \tau_k^{(n)})\cdot(\tau_k^{(n)} - \tau_{k-1}^{(n)})}} - \frac{\sqrt{T - \tau_k^{(n)}} \cdot \delta(\tau - \tau_{k-1}^{(n)})}{\sqrt{(T - \tau_{k-1}^{(n)})\cdot(\tau_k^{(n)} - \tau_{k-1}^{(n)})}} ; \; k = 2, 3, \ldots ;$$

$n = 1, 2, \ldots$; k, n – взаємно прості числа.

Повну ортонормовану систему функцій $\left\{\tilde{e}_k^{(n)}(\tau)\right\}$ використовують для апроксимації ядра $\alpha(\tau,t)$ рівняння (1) у вигляді $\tilde{\alpha}_n(\tau,t)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\cdot\tilde{e}_k^{(n)}(\tau)\cdot\psi_k(t)$ і для оцінки критерію $I_2(\tilde{\alpha}_n^{\,*},t)=\min\limits_{\{\tilde{\alpha}_n\}}\frac{1}{R}\sum\limits_{l=1}^{R}\left[m_l(t)-\int\limits_{a_l(t)}^{t}\tilde{\alpha}_n(\tau,t)\cdot y_l(\tau)\cdot m_l(\tau)\cdot d\tau\right]^2$.

Справджується таке твердження [2].

Теорема 3. Нехай $\alpha(\tau,t)\in W^{-1}\times C$, $X(\tau,t)\in L_2\times C$ і для всіх $t\in[0,T]$

$$D^*X(\tau,t)=\alpha(\tau,t)\quad (\ D^*=-\frac{d}{d\tau}),\quad \omega_t(X,\frac{T}{n})=\sup_{0<h\le\frac{T}{n}}\left(\int\limits_0^T\left|X(\tau+h,t)-X(\tau,t)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді для зафіксованого $t=b$ виконується така оцінка критерію $I_2(\tilde{\alpha}_n^{\,*},t)$:

$$I_2(\tilde{\alpha}_n^{\,*},b)\le\tilde{A}\cdot\left[\omega_b\left(X,\frac{T}{n}\right)\right]^2,$$

де $\tilde{A}=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1}{R}\sum\limits_{l=1}^{R}\int\limits_0^T\left|\frac{d(m_l(\tau)\cdot y_l(\tau))}{d\tau}\right|^2 d\tau$.

Одержані теоретичні результати можна застосувати для розв’язування практичних задач моделювання систем, що розвиваються, в економіці, техніці, біології тощо, зокрема, для оцінки точності ідентифікації. Розроблену процедуру ідентифікації динамічних об’єктів з мультиплікативним ядром можна використати для побудови теорії систем, що розвиваються, і систем керування для них.

---

1. *Гладкивская О.В.* Исследование задач идентификации для одного класса динамических систем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1990.
2. *Гладківська О.В.* Приклад повної ортонормованої системи в гільбертовому просторі узагальнених функцій // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49, № 5.
3. *Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М.* Моделирование развивающихся систем. М., 1983.
4. *Диденко В.П., Ляшко И.И.* Динамические системы с разрывными характеристиками. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1977.
5. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.

APPROXIMATION OF EFFECTIVENESS FACTORS OF FUNCTIONING FOR DYNAMIC MODELS OF V. M. GLUSHKOV

O. Gladkivska
Scientific Research Center of Law Informatics
Academy of Law Sciences of Ukraine ,
110 B Saksagans'kogo str., Kyiv, Ukraine.
gladkivska@ukr.net

The tasks of identification of one class of dynamic models of V.M. Glushkov are considered. The search of values, which physical contents - metrics of efficiency of operation of simulated systems is carried on. The error functionals are formulated, which minimization gives solution of the task. The estimations of used error functionals are resulted.

Key words: dynamic models, identification, least squares method generalized functions, complete orthonormalized system.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2004
Прийнята до друку 01.06.2004