

УДК 621.3.01

НИТКОПОДІБНА МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНО НЕОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ АНАЛІЗУ ОБ'ЄМНОГО РОЗПОДІЛУ ЕЛЕКТРИЧНОЇ НАПРУЖЕНОСТІ

Й. Захарія

*Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна*

Розглянуто питання дискретизації об'єму неоднорідного втратного діелектричного середовища, зручної для застосування в аналізі імпульсних одновимірних, хвилеподібних функцій (wavelet). Для аналізу запропоновано дискретизоване інтегральне рівняння другого роду. Додано елементарні приклади застосування ниткоподібної моделі.

Ключові слова: неоднорідне середовище з втратами (вейвлет).

Розглянемо лінійне, ізотропне, дискретно неоднорідне, у загальному випадку втратне діелектричне середовище. Таке середовище формується з об'ємів однорідних середовищ, комплексна діелектрична проникність яких відома. Геометричні розміри поверхонь, які охоплюють об'єми окремих середовищ, також вважаємо достатньо точно відомими. Під впливом зовнішнього електромагнітного поля неоднорідне середовище нагрівається, однак зміни температури будемо вважати настільки малими, що комплексні проникності практично не змінюються в процесі нагрівання.

Близькими до з'ясованих вище є умови гіпертермії неоднорідного середовища надвисокочастотним полем [2–4]. Метою розрахунку розподілу електричної напруженості у такому випадку є просторова локалізація розташування максимумів об'ємної густини потужності нагрівання, використання результатів аналізу для керування об'ємним розподілом електричної напруженості, а також оцінка рівня об'ємної густини потужності в окремих точках об'єму середовища. Така мета аналізу потребує достатньо густого розташування точок розрахунку значень електричної напруженості, а також, відповідно, високої точності визначення електричної напруженості у цих точках.

Розв'язання сформульованої вище задачі потребує дискретизації об'єму неоднорідного середовища, під якою розуміють декомпозицію середовища на елементарні об'єми, напруженість поля в яких рівномірно розподілена. Оскільки поляризаційні струми найбільші в напрямі вектора електричної напруженості зовнішнього поля, то дискретизацію об'єму середовища виконують у площині, перпендикулярній до цього вектора. У згаданій площині виділяють достатньо малі площі Δs перерізів циліндричних об'ємів поляризаційного струму з коловою або прямокутною формою їхнього перерізу. Однак середовище є дискретно

неоднорідним також уздовж виокремленого зазначеним вище способом об'єму поляризаційного струму. Для вектора зовнішньої напруженості електричного поля в напрямі координати x кожний однорідний проміжок нитки струму розглядаємо як одиничний нормалізований інтервал $x = [0, 1]$. Для описання розподілу поздовжньої електричної напруженості на такому інтервалі зручно застосовувати хвилеподібні функції (wavelet), наприклад імпульсні функції Гаара [3, 5], які визначають довжину елемента дискретизації вздовж циліндра об'єму струму відповідно до значення індексу розрізнення хвилеподібної функції.

Вимоги до дискретизації об'єму середовища. Наявність поздовжнього поляризаційного струму в неоднорідному середовищі циліндричного об'єму, як прийнято вище у напрямі координати x , у загальному випадку створює електричне поле в напрямі всіх координат простору. Відповідно до теореми еквівалентності поляризаційного струму і струму провідності у вакуумі [1], нехай густина струму провідності $\delta_x(x)$ існує в напрямі координати x . Векторний потенціал випромінюваного поля має тоді лише одну складову

$$A_x = -\mu_0 \int_{V'} G(\bar{r} | \bar{r}' \odot) \bar{\delta}_x(x) dV', \quad (1)$$

де $G(\bar{r} | \bar{r}' \odot)$ функція Гріна у загальному випадку залежить від усіх координат простору; μ_0 – магнітна проникність вакууму. Складові випромінюваного електричного поля задані виразами [1]

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 A_x \right); \quad (2)$$

$$E_y = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}; \quad E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z},$$

де ω – кутова частота поля; ϵ_0 – діелектрична проникність вакууму. Нема складових у таких напрямках, у яких похідні векторного потенціалу зникають. Отже, у кожному елементі нитки струму електричне поле є сумою полів, випромінюваних усіма елементами ниткової моделі.

Одною з вимог щодо площі Δs є таке зменшення площі перерізу циліндричного об'єму поляризаційного струму, щоб можна було знехтувати напруженістю поля, вектор якої перпендикулярний до осі об'єму поляризаційного струму. З метою виявлення рівня поперечної складової електричної напруженості розглянуто поле в неоднорідному діелектричному стрижні, розташованому між широкими стінками прямокутного хвилеводу (рис. 1). Зовнішнє електричне поле вважаємо полем стоячої хвилі з максимумом у площині діелектричного стрижня ($z=0$). Площу перерізу стрижня (поляризаційного струму) нормовано відносно ширини хвилеводу A , тобто $s = \Delta s / A^2$. У цьому разі враховано лише рівномірно розподілені напруженості електричного поля E_x на відрізках $x=[0,h]$; $\epsilon_1=2,24$; $x=[h,B]$; $\epsilon_2=6$.

Для визначення поперечних напруженостей (E_y) виконано достатньо дрібну дискретизацію обох однорідних відрізків і описаним нижче методом розраховано E_y в кожному елементі. На кожному відрізку вибрано $|E_y|_{\max}$ і визначено відношення $r=|E_y/E_x|_{\max}$. Таке відношення залежить від площі Δs (відношення s). Для заданого прикладу ($h/A=0,6$; $B/A=0,435$; $d/A=0,4$; $\lambda_0/2A=0,7$; λ_0 – довжина робочої хвилі) отримано (r_1 для ε_1 ; r_2 для ε_2)

$s=0,09$	$r_1=0,030$	$r_2=0,031$
$s=0,04$	$r_1=0,013$	$r_2=0,014$
$s=0,01$	$r_1=0,005$	$r_2=0,006$

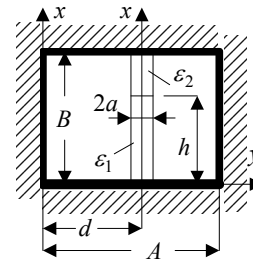


Рис. 1 Переріз прямокутного хвилеводу з діелектричним стрижнем.

Як випливає з наведеного прикладу, площа перерізу нитки поляризаційного струму має бути достатньо малою, щоб можна було нехтувати електричною напруженістю, поперечною до осі нитки, збудженою поздовжніми електричними напруженостями. Зазначимо, що відношення r практично не залежить від діелектричної проникності середовища. У випадку іншої структури (у нашому прикладі використано структуру прямокутного хвилеводу) доцільно використати аналогічну перевірку обраної площі дискретизації.

З іншого боку, площа перерізу нитки поляризаційного струму визначена також характером неоднорідності середовища. Доцільно вважати площу стику середовищ у перерізі циліндра поляризаційного струму перпендикулярною до осі циліндра. Тоді неоднорідне середовище циліндра поляризаційного струму є сукупністю інтервалів (проміжків) з різними діелектричними проникностями. З метою досягнення таких умов необхідно зменшувати площу Δs . Для визначення поля, випромінюваного циліндричним об'ємом з поляризаційним струмом, у випадку достатньо малої площі циліндричного об'єму зручно моделювати цей струм ниткою еквівалентного струму провідності, розташованою на осі циліндра. Це дає підстави говорити про нитку поляризаційного струму.

Апроксимацію поздовжнього розподілу електричної напруженості в об'ємі циліндра поляризаційного струму виконуємо на кожному нормалізованому інтервалі ($x=[0, 1]$) окремо за допомогою хвилеподібних функцій Гаара $w_{i,k}(x)$, як описано вище. У деякому P -му інтервалі нитки струму поздовжню напруженість визначаємо як суму рівномірно розподіленої на інтервалі (E_p^-), і нерівномірно розподіленої, описаної рядом функцій $w_{i,k}(x)$

$$E_p = E_p^- + \sum_{(i)} \sum_{(k)} E_p^{(i,k)} w_{ik}(x), \tag{3}$$

де

$$w_{ik}(x) = 2^{i/2} w(2^i - k) \tag{4}$$

є імпульсною (дискретною) хвилеподібною функцією Гаара, визначеною на заданому інтервалі для конкретного індексу розрізнення i . Індекс k визначає

зміщення хвилеподібної функції на даному інтервалі. Максимальне значення останнього індексу взаємопов'язане з індексом розрізнення: $k = 2^i - 1$. Для $i=0$ елемент $\Delta x = 1/2^i$, який займає функція $w_{i,k}(x)$, збігається з інтервалом однорідного середовища в об'ємі нитки. Однак для $i>0$ довжина елемента $\Delta x = 1/2^i$ зменшується відносно довжини інтервалу. Отже, дискретизація інтервалу нитки поляризаційного струму визначена максимальним індексом розрізнення i . Звичайно використовують $i < 4$. Але і тут треба поступово збільшувати цей індекс, щоб виявити необхідне максимальне його значення. З'ясовану вище дискретизацію у загальному випадку треба виконувати також у напрямках двох інших координат.

Система рівнянь. Відповідно до теореми еквівалентності поляризаційних струмів і струмів провідності у вакуумі суттєво спрощується визначення напруженостей поля окремих поляризаційних струмів.

Спосіб укладання системи рівнянь для визначення напруженостей E_p^- та $E_p^{(i,k)}$ залежить від структури електродинамічної задачі. Для цього найчастіше використовують граничні умови або дискретизоване інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. В обох випадках отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), розв'язують яку найчастіше методами моментів.

Нижче, на прикладі визначення рівномірно на інтервалі розподілених електричних напруженостей, розглянемо алгоритм і особливості формування згаданих вище СЛАР. Елементи дискретизації в напрямі координати x позначимо індексом p ($p=1..P..PI$), який є порядковим номером елемента на заданій нитці струму. У перпендикулярній до осі нитки площині відповідна нумерація ниток є у двох взаємно перпендикулярних координатах: по координаті y ($q=1..Q..QI$) та по координаті z ($r=1..R..RI$). За принципом суперпозиції комплексних напруженостей результуючу напруженість в елементі P, Q, R можна записати сумами

$$E_{PP}^-(Q, R) = \sum_{(q,r)(p)} E_{pp}^-(q, r) A_{pp}(q, r) + \sum_{(p,r)(q)} E_{pq}^-(p, r) A_{pq}(p, r) + \sum_{(p,q)(r)} E_{pr}^-(p, q) A_{pr}(p, q) + E_{P0}(Q, R), \quad (5)$$

у яких перші суми – це напруженості від паралельних ниток, другі і треті – від ниток струму в напрямі координат y , z . Невідомими є електричні напруженості в усіх елементах дискретизації, які за допомогою коефіцієнтів $A_{pr}(p, q)$ визначають напруженість в елементі P, Q, R . До підсумованого поля додається відома напруженість зовнішнього (заданого) поля $E_{P0}(Q, R)$, записаного в елементі P, Q, R . Перша сума виразу (5) охоплює також напруженість $E_{pp}^-(Q, R)$, випромінювану власним поляризаційним струмом елемента P, Q, R ($p=P$). Тому рівняння (5) набуває вигляду

$$E_{PP}^-(Q, R)(A_{PP}(Q, R) - 1) + \sum_{(q,r)} \sum_{(p \in \odot)} E_{Pp}^-(q, r) A_{Pp}(q, r) + \sum_{(p,q)} \sum_{(r)} E_{Pr}^-(p, q) A_{Pr}(p, q) = -E_{P0}(Q, R). \quad (6)$$

В останньому рівнянні p' не враховує елемента P . Аналогічно записують рівняння для координат y, z . Відповідно до виразу (6) отримуємо $N = PI + QI + RI$ рівнянь, що збігається із загальною кількістю інтервалів.

У разі використання другого члена апроксимації (1) невідомими стають напруженості $E_{PP}^{(i,k)}(Q, R)$. З урахуванням того, що напруженості $E_{Pp}^-(Q, R)$ розраховано відповідно до рівнянь (6), а також, що рівняння для $E_{PP}^{(i,k)}(Q, R)$ записують ідентично, як рівняння (6), а також з урахуванням подвійних сум відносно індексів i, k отримаємо

$$\sum_{(i,k)} E_{PP}^{(ik)}(Q, R)(A_{PP}^{(ik)}(Q, R) - 1) + \sum_{(p,q,r)} \sum_{(i,k)} E_{Pq}^{(ik)}(p, r) A_{Pq}^{(ik)}(p, r) + \sum_{(p,q,r)} \sum_{(i,k)} E_{Pr}^{(ik)}(p, q) A_{Pr}^{(ik)}(p, q) = -E_{P0}(Q, R) - \sum_{(p,q,r)} E_{Pp}(q, r) A(q, r) - \sum_{(p,q,r)} E_{Pq}^-(p, r) A_{Pq}(p, r) - \sum_{(p,q,r)} E_{Pr}^-(p, q) A_{Pr}(p, q). \quad (7)$$

На правий бік рівняння (7) перенесено відомі величини, тому для $i = \text{const}$ кількість рівнянь зростає лише до $N2^i$. Укласти рівняння можна для кожного індексу $i = \text{const}$ окремо, використовуючи відомі результати розрахунків для нижчих значень індексу i . Наведені рівняння спрощуються, якщо площа перерізу нитки поляризаційного струму достатньо мала, і можна нехтувати напруженостями, що наведені перпендикулярними струмами.

Розв'язування СЛАР, укладеної відповідно до рівняння (7), наприклад методом Гальоркіна, потребує формування скалярних добутків з ваговими функціями, які збігаються з базисними хвилеподібними функціями. Зазначимо, що скалярний добуток хвилеподібної функції і сталої величини дорівнює нулю. Отже, на підставі рівнянь (7) отримуємо

$$\sum_{(p,r,q)} \sum_{(i,k)} E_{Pp}^{(ik)}(q, r) \langle A_{Pp}^{(ik)}(q, r), w_{s,t}(x) \rangle + \sum_{(p,q,r)} \sum_{(i,k)} E_{Pq}^{(ik)}(p, r) \langle A_{Pq}^{(ik)}(p, r), w_{s,t}(y) \rangle + \sum_{(p,q,r)} \sum_{(i,k)} E_{Pr}^{(ik)}(p, q) \langle A_{Pr}^{(ik)}(p, q), w_{s,t}(z) \rangle = - \sum_{(i,k)} \langle E_{P0}(Q, R), w_{s,t}(x) \rangle - \sum_{(p,q,r)} \sum_{(i,k)} E_{Pp}^-(q, r) \langle A_{Pp}(q, r), w_{s,t}(x) \rangle - \sum_{(p,q,r)} \sum_{(i,k)} E_{Pq}^-(p, r) \langle A_{Pq}(p, r), w_{s,t}(y) \rangle - \sum_{(p,q,r)} \sum_{(i,k)} E_{Pr}^-(p, q) \langle A_{Pr}(p, q), w_{s,t}(z) \rangle, \quad (8)$$

де s – індекс розрізнення, t – індекс зміщення для хвилеподібних вагових функцій $w_{is,t}(x)$, які можуть відрізнятися від індексів i, k для базисних хвилеподібних функцій. У рівнянні (8) на правий бік перенесено вирази з відомими рівномірно розподіленими електричними напруженостями. У виразах (8) напруженості

електричного поля для всіх індексів залишено на лівому боці. Однак у разі розв'язування СЛАР для $i+1$ усі скалярні добутки, визначені індексами $i < i+1$, можна перенести у правий бік рівняння як відомі з окремих розв'язань СЛАР для індексів $0, 1, i$. Очевидно, порядок СЛАР зростає тут лише до значення $N2^{i+1}$. Застосування хвилеподібних функцій дає змогу розріджувати матрицю коефіцієнтів СЛАР завдяки ортонормованості хвилеподібних функцій.

ПРИКЛАДИ. На рис. 2 показано розподіл амплітуди поздовжньої складової електричної напруженості у тонкому неоднорідному діелектричному стрижні,

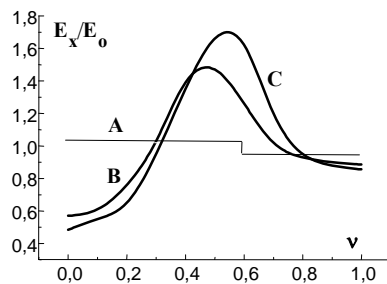


Рис. 2. Розподіл поздовжньої електричної напруженості у неоднорідному діелектричному стрижні з рис. 1.

розташованому між широкими стінками прямокутного хвилеводу, (див. рис. 1, $a_1/A=0,05$).

Як видно із рис. 2, рівномірно розподілені напруженості електричного поля (на рис. 2 прями А) не задовольняють граничної умови на стику однорідних частин діелектричного стрижня. Застосування апроксимації хвилеподібними функціями для $i=0$ (крива В) та $i=1$ (крива С) наближає відношення напруженостей поля з обох боків стику до такого

відношення, заданого граничною умовою. Суттєво неоднорідним стає розподіл електричної напруженості на довшій частині стрижня з нижчою діелектричною проникністю.

Структура іншого прикладу зображена на рис. 3. До тонкого ідеально провідного циліндра хвилевідного штиря прилягає тонкий неоднорідний діелектричний стрижень. Площа пререрізу стрижня у 6 разів менша від площі перерізу провідного циліндра. Задача – з'ясувати вплив діелектричної накладки на вхідний імпеданс провідного хвилевідного штиря $Z/\rho_0 = U/I_1\rho_0$, де $\rho_0 = 120\pi$ Ом. Для рівномірно розподілених струмів в індуктивному штирі, а також у діелектричній накладці, $Z/\rho_0 = 1,044 + j0,679$ Ом.

Урахування функції Гаара для $i=0$ приводить до значення вхідного імпедансу $Z/\rho_0 = 1,117 + j0,793$ Ом; урахування двох функцій апроксимації розподілу струму для $i=0$ та $i=1$ уточнює значення вхідного імпедансу $Z/\rho_0 = 1,161 + j0,301$ Ом. Як бачимо, збільшення індексу розрізнення (i) уточнює значення вхідного реактансу, який знижується внаслідок впливу діелектричної накладки.

Отже, ниткоподібна модель неоднорідного середовища задовольняє обидві поставлені вище вимоги: забезпечує достатньо високу точність розрахунку напруженості поля у достатньо густій системі точок в об'ємі неоднорідного середовища. Застосування одновимірних хвилеподібних функцій супроводжується дискретизацією середовища вздовж нитки моделі відповідно до необхідного розрізнення на кривій розподілу напруженості поля.

Недоліком моделі є високий порядок СЛАР. Вплив цього недоліку різко знижується, якщо для розв'язання СЛАР застосувати метод спряжених градієнтів або метод регуляризації.

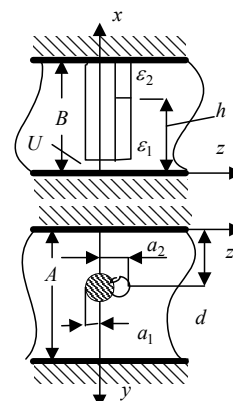


Рис. 3. Хвилевідний штир з неоднорідною діелектричною накладкою.

1. Захарія Й.А. Основи електродинаміки і поширення радіохвиль. Львів, 1996. С. 314.
2. Захарія Й.А., Патріло Ю.М. Моделювання розподілу об'ємної густини потужності електромагнітного поля в умовах гіпертермії // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 2000. № 387. С. 13–16.
3. Наконечний А.Й. Теорія малохвильового (wavelet) перетворення та її застосування. Львів, 2001. С. 277.
4. Шорт Дж. Г. Применение физической гипертермии для лечения злокачественных новообразований. // Труды института инженеров по электронике и радиотехнике. 1980. Т. 68. № 1.6. С. 157–168.
5. Sarkar T.K. Discrete Wavelet Techniques // Antennas & propagation magazine. 1998. Vol. 40. N 5. P. 49–70.
6. Stuchly M.A., Stuchly S.S. Dielectric properties of biological substances tabulated. // J. Microwave power. 1950. Vol. 16. P. 19–26.

FILAMENT MODEL OF DISCRETE-INHOMOGENEOUS MEDIUM FOR ELECTRIC FIELD 3-D DISTRIBUTION ANALYSIS

Y. Zakharia

Lviv Polytechnic National University

S.Bandery str., 12, 79013 Lviv Ukraine

Abstract: A filament model of lossy discrete inhomogeneous medium is considered. For approximation of electrical field distribution along of each filament the discrete wavelet functions are used. Analysis is fulfilled by applying of the discretized integral equation of second kind. Simple examples of analysis are added.

Key words: Lossy inhomogeneous media, wavelet.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2004

Прийнята до друку 04.06.2004