ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА *ELECTRICAL ENGINEERING*
2004. Вип. 57. С. 94-98 *2004. Is. 57. P. 94-98*

УДК 621.3.01

ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ЕНЕРГІЯ РУХОМИХ СЕРЕДОВИЩ

В. Чабан

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна,
vtchaban@polynet/lviv//ua

Одержано вираз перетворення енергії в рухомому середовищі на випадок довільного закону зміни швидкості в часі. Формула узагальнює відомі результати електродинаміки рухомих середовищ. Вона одержана безпосередньо з рівнянь у векторах електромагнітного поля, записаних для нерухомого середовища, якщо просторові координати узалежнені від часу.

Ключові слова: перетворення енергії, рухоме середовище, електродинаміка.

Оптимізація обчислювального процесу в цілому залежить від раціонального вибору окремих обчислювальних процедур, однією з яких є апроксимація різноманітних нелінійних залежностей. Зокрема, багато задач у царині нелінійної електротехніки неможливо розв’язати з достатньою точністю без урахування насичення магнітопроводів електротехнічних пристроїв. Для цього необхідно будувати апроксимації для таблично заданих характеристик намагнічування (ХН) електротехнічних сталей або ділянок магнітопроводу, які мають експериментальне походження. Від точності та способу відображення цих кривих нерідко залежить успіх розв’язування сформульованої задачі в цілому [16], тому питання апроксимації ХН має важливе значення.

Цілісну картину поширення електромагнітного поля в часі – просторі завершують енергетичні взаємоперетворення електромагнетної енергії в інші види енергії – механічну, теплову, випромінювання тощо. Початком розв’язування цієї складної теоретичної задачі слугуватимуть відомі рівняння Максвелла, записані для нерухомого середовища. Всі наступні їхні узагальнення будуть виконані в результаті дотримання суворих правил математичного аналізу. Одержані результати дають змогу розглянути природу електромагнетизму під ще одним кутом зору, ближчим до дійсності.

Запишемо відомі рівняння Максвелла в нерухомому середовищі:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E};\ \ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s);\ \ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0;\ \ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho;\ \ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},\ \ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1)$$

де **H E** – вектори напруженостей магнетного й електричного поля; $\mathbf{E}_S$ – вектор напруженості стороннього електричного поля; B, $\tilde{D}$ вектори магнетної й електричної індукції; ρ – об’ємна густина ладунку; γ, ν, ε – електропровідність, релактивність і електрична проникність середовища; ∇ – оператор набла; t – час.

Диференціальні рівняння (1) описують фізичний процес як у рухомих, так і в нерухомих середовищах, залежно від умов, які накладатимемо на просторові координати. У нерухомому середовищі координати розглядуваної точки простору $r(t)$ є фіксовані і не залежать від часу. Тоді частинні похідні за часом у (1) є вичерпні, а самі рівняння в нерухомому середовищі мають незмінний вигляд (1). У рухомому середовищі координати розглядуваної точки простору стосовно нерухомого спостерігача узалежнені від часу

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \text{ або } x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t). \qquad (2)$$

У такому разі частинні похідні за часом у (1) треба брати вже відносно як повні. Тоді одержимо [1]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}; \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{D}. \qquad (3)$$

Скалярний добуток $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ є порівняно простим виразом. Для прикладу розкриємо його в декартових координатах

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \qquad (4)$$

де v_i – проекції вектора швидкості на координатні осі

$$v_i = \partial i / \partial t, \quad i = x, y, z. \qquad (5)$$

Рівняння (3) узагальнюють (1) на випадок рухомих середовищ, причому швидкість може бути як сталою, так і змінною в часі.

Рівнянням (3) можна надати звичнішого вигляду, якщо скористатися відомою теоремою векторного аналізу, записаною у конкретних векторах **v** і **F** [2]:

$$-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{v}). \qquad (6)$$

На підставі (6) рівняння (3) набувають вигляду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B}; \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{D} - \rho \mathbf{v}. \qquad (7)$$

Проте в практичних розрахунках доцільно притримуватися запису у вигляді (3), як простішого в реалізації, позбавленого векторних добутків векторів поля, оператора набла і швидкості.

Запишемо (7) у квазістаціонарному наближенні

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s); \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \qquad (8)$$

Щоб ліпше осмислити одержаний результат, запишемо аналогічні до (8) відомі рівняння [3]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); \ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \tag{9}$$

У нашому випадку вони дещо інші.

Річ у тім, що рівняння (9) записані для нерухомого спостерігача, а (8) – для рухомого. Щоб переконатися в правильності сказаного, достатньо як з (8), так і з (9) вилучити вектор електричного поля. В обох випадках отримуємо той самий тривіальний результат – розрахункові рівняння магнітного поля [1]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{10}$$

Помножимо перше рівняння (3) скалярно на **E**, а друге – на **H** і додамо результати один до одного. Якщо тепер розглядати процес у деякому замкнутому об'ємі *V,* обмеженому замкнутою поверхнею *S*, то одержимо

$$-\int_V \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV = \int_S \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) dS + \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \gamma \mathbf{E} \mathbf{E}_s dV + \mathfrak{M}, \tag{11}$$

де

$$\mathfrak{M} = \int_V \left(\mathbf{H} \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{B} + \mathbf{E} \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{D} \right) dV. \tag{12}$$

Для виведення (11) використано відому теорему векторного аналізу

$$\mathbf{H} \left(\nabla \times \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \left(\nabla \times \mathbf{H} \right) = \nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H} \right), \tag{13}$$

а заодно теорему Остроградського

$$\int_V \left(\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) \right) dV = \int_S \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) dS \,. \tag{14}$$

Ліва частина співвідношення (11) репрезентує зменшення електромагнітної енергії в нерухомому середовищі в деякому замкнутому об'ємі, а права деталізує, на що вона тратиться. Наприклад, перший доданок відтворює енергію, що випромінюється; другий доданок відтворює енергію, що перетворюється в тепло в нерухомому середовищі; третій – відтворює енергію, що перетворюється в сторонніх джерелах а четвертий, останній, доданок репрезентує перетворення енергії, пов'язаної з механічним рухом. Додатне значення цього доданку свідчить про перетворення електромагнітної енергії в механічну (система мотора), а від'ємне – навпаки (система ґенератора).

Для порівняння запишемо відомий баланс енергії [3]

$$-\int_V \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV = \int_S \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) dS + \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \gamma \mathbf{E} \mathbf{E}_s dV + \mathfrak{A}, \tag{15}$$

де

$$\mathfrak{A} = \int\limits_V \gamma \mathbf{E}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)dV. \tag{16}$$

Оскільки вирази (11) і (15) відрізняються лише доданками (12) і (16), то надалі нас цікавитимуть саме вони.

Перш за все доведемо, що (16) є окремим випадком (12), зокрема в квазістаціонарному наближенні поза сторонніми полями, для чого скористаємося відомою теоремою векторного аналізу [2]

$$-\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{v}\times\mathbf{B} - \left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} - \mathbf{v}\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right) + \mathbf{B}\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right). \tag{17}$$

Якщо тепер у (17) знехтувати трьома останніми доданками в правій частині (причому явно $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$), то вираз (12) у квазістаціонарному наближенні ($\mathbf{D} = 0$) набуде вигляду

$$\mathfrak{M} = \int\limits_V \left(\mathbf{H}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}\right)dV = \int\limits_V \left(-\mathbf{H}\left(\nabla\times\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\right)dV\ . \tag{18}$$

Згідно з правилом, що $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\mathbf{c}$, одержимо

$$-\mathbf{H}\left(\nabla\times\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) = \nabla\times\mathbf{H}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) = \gamma\mathbf{E}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right). \tag{19}$$

Підставимо (19) у (18), одержимо остаточно: $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$, що й треба було довести.

А тепер глибше проаналізуємо вираз (11).

Оскільки $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, то вираз (12) можемо записати у вигляді

$$\mathfrak{M} = \int\limits_V \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)W dV\ , \tag{20}$$

де

$$W = \frac{1}{2}\left(\mu H^2 + \varepsilon E^2\right) \tag{21}$$

– постульована густина повної енергії електричного й магнетного полів.
Згідно з (20) вираз (4) перетворимо так:

$$-\int\limits_V \frac{\partial W}{\partial t}dV = \int\limits_S \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)dS + \int\limits_V \gamma E^2 dV + \int\limits_V \gamma\mathbf{E}\mathbf{E}_s dV + \int\limits_V \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)W dV. \tag{22}$$

Якщо тепер скористатися виразом повної похідної

$$\frac{dW}{dt} = \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)W + \frac{\partial W}{\partial t}\ , \tag{23}$$

то рівняння (22) набуде завершеного естетичного вигляду, як і всі фундаментальні закони, що описують фізичний процес в усій його складності:

$$-\int_V \frac{dW}{dt} dV = \int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H}) dS + \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \gamma \mathbf{E}\mathbf{E}_s dV. \qquad (24)$$

Тепер на відміну від (11), ліва частина співвідношення (24) репрезентує зменшення електромагнітної енергії в рухомому середовищі в деякому замкнутому об'ємі, а права деталізує, на що вона витрачається, – на випромінювання, перетворення в тепло й у сторонніх джерелах.

1. *Чабан В*. Електродинаміка рухомих середовищ. // Технічні вісті. 2003. 1(16), 2(17). С. 33–36.
2. *Чабан В*. Чисельні методи. Львів. 2001. 186 с.
3. *Шимони К*. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1965. 740 с.

ELECTROMAGNETIC ENERGY OF MOVABLE MEDIA

V. Tchaban

Lviv Polytechnic National University
12 Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine
vtchaban@polynet.lviv.ua

There is got the expression of full energy transformation in movable medium in case of free low of velocity changing in time. The formula generalizes known results of movable media electrodynamics. It is received from electromagnetic field vectors equations which are written down for immovable medium, if its space coordinates are depended from time.

Key words: movable medium, energy transformation, electrodynamic.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2004
Прийнята до друку 01.07.2004