

УДК 517:519.642:537

## МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ПУЧКА ЕЛЕКТРОНІВ У САМОУЗГОДЖЕНОМУ ПОЛІ ПУШКИ ПІРСА СФЕРИЧНОГО ТИПУ

Б. Остудін, А. Романенко

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна,  
e-mail: kom@franko.lviv.ua*

Наведено один спосіб розрахунку руху пучка заряджених частинок, обмеженого власним просторовим зарядом. Розроблений авторами алгоритм розв'язування самоузгоджених задач електронної оптики [6], що ґрунтується на методі інтегральних рівнянь, використано в реальній задачі про формування великострумного пучка електронів у пушці Пірса [1]. Розраховано первеанс та кросовер пучка, побудовано відповідні фазові характеристики пучка, на основі середньоквадратичного емітансу визначено кількісну оцінку ступеня впорядкованості електронного потоку та якість його формування. Також з'ясовано порядок залежності густини розподілу просторового заряду від потенціалу. Одержані результати цілком узгоджуються з характеристиками пушки.

*Ключові слова:* самоузгоджена задача електронної оптики; пучок, обмежений просторовим зарядом; метод інтегральних рівнянь.

У багатьох практичних задачах важливою є проблема формування добре сфокусованих інтенсивних потоків заряджених частинок. Складність експериментального дослідження таких систем призводить до потреби математичного моделювання відповідних фізичних процесів. Особливо важливими є випадки інтенсивних потоків, коли треба враховувати власний просторовий заряд пучка [2, 4, 5, 8].

Розрахунок нерелятивістського пучка (з напругою до 150 кВ), у якому впливом власних магнітних полів на рух частинок можна знехтувати, за відсутності зовнішнього магнітного поля, в усталеному режимі полягає в розв'язуванні стаціонарної самоузгодженої задачі [2, 5, 6].

Ця задача потребує розв'язування системи рівнянь електричного поля, рівняння руху заряджених частинок та рівняння неперервності заряду за заданих початкових та граничних умов.

Змоделюємо рух пучка електронів у пушці Пірса сферичного типу (рис. 1) з первеансом  $1.9 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{V}^{-3/2}$  та компресією 27:1 [1]. Радіус її катода становить 8.02 мм, половина кута збіжності потоку в пушці – 38.86, радіуси кривини катодної та анодної поверхонь – 12.78 та 5.25 мм, відповідно. Кросовер (мінімальний переріз) пучка міститься на відстані  $z_{\min} = 26.28 \text{ мм}$ , причому  $r_{\min} = 1.63 \text{ мм}$  [1].

**Формулювання задачі.** Розглянемо простір  $V$ , заповнений об'ємним зарядом з густиною  $\rho$ , та кусково-гладку розімкнену поверхню електродів  $S$  у цьому просторі, причому  $S$  тлумачимо як сукупність циліндричних поверхонь, одержаних обертанням навколо осі  $z$  вибраної циліндричної системи координат  $(r, z, \varphi)$  деяких твірних  $L_i, i = 1, \dots, 7$ , які в площині  $rOz$  задані параметричними рівняннями

$$\begin{cases} r_1(\tau) = 12.78 \sin \tau; & \tau_1^{(1)} = 0; \\ z_1(\tau) = -12.78 \cos \tau + 12.78; & \tau_2^{(1)} = 0.6782; \\ \begin{cases} r_i(\tau) = r_{\text{поч}}^{(i)} + \frac{r_{\text{кін}}^{(i)} - r_{\text{поч}}^{(i)}}{T^{(i)}} \tau; & 0 \leq \tau \leq T^{(i)} = \sqrt{(r_{\text{кін}}^{(i)} - r_{\text{поч}}^{(i)})^2 + (z_{\text{кін}}^{(i)} - z_{\text{поч}}^{(i)})^2}; \\ z_i(\tau) = z_{\text{поч}}^{(i)} + \frac{z_{\text{кін}}^{(i)} - z_{\text{поч}}^{(i)}}{T^{(i)}} \tau; & i = 2, 3, \dots, 7, \text{ де} \end{cases} \end{cases}$$

$i$	$r_{\text{поч}}^{(i)}$	$r_{\text{кін}}^{(i)}$	$z_{\text{поч}}^{(i)}$	$z_{\text{кін}}^{(i)}$
2	8.215	10.8	3.03	6.64
3	10.8	10.8	6.64	9.87
4	9.21	10.8	9.87	9.87
5	4.37	4.136	9.87	10.32
6	4.136	3.2	10.32	14.14
7	3.2	3.2	14.14	16.12

Нехай на поверхні  $S$  задано потенціал, причому потенціал емітера дорівнює нулю. З поверхні катода всередину простору  $V$  вилітають заряджені частинки. Розрахуємо рух пучка заряджених частинок у режимі обмеження струму об'ємним зарядом за нульових початкових швидкостей, що відповідає необмеженій емісійній здатності катода.

Для визначення потенціалу  $u$  відповідного електростатичного поля розв'яжемо зовнішню задачу Діріхле для рівняння Пуассона в просторі зі щілинами:

$$\Delta u = -\rho(u)/\varepsilon_0 \text{ зовні } S = \sum_{i=1}^7 S_i; \tag{1}$$

$$u_{|S_1} = 0 \text{ (катод);} \tag{2}$$

$$u_{|S_{2,3,4}} = -8 \text{ (фокусувальний електрод), } u_{|S_{5,6,7}} = 2000 \text{ (анод),}$$

за умови регулярності розв'язку на нескінченності, де  $\varepsilon_0$  – діелектрична стала. У рівнянні (1) функція  $\rho$  визначена характером руху пучка частинок у просторі  $V$ , тобто нелінійно залежить від поля.

За гауссівською системою одиниць запишемо рівняння руху частинок маси  $m$  і заряду  $e$  у формі Ньютона

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{e}{m} \vec{E}, \tag{3}$$

де  $\vec{r}(t)$  – радіус-вектор частинки;  $t$  – час;  $\vec{E}$  – вектор напруженості електричного поля, причому  $\vec{E} = -\text{grad } u$ . Припустимо, що частинки стартують з деякої відстані

$\bar{d}_0$  від катода з нульовою початковою швидкістю

$$\bar{r}(0) = \bar{d}_0; \quad \bar{r}'(0) = 0. \quad (4)$$

Змоделюємо об'ємний заряд за методом трубок струму [7], відповідно до якого катод поділяють на декілька секцій і вважають, що всі траєкторії заряджених частинок, емітовані однією секцією катода, подібні й утворюють елементарну трубку струму з незмінним струмом, який вона переносить. Нехай цей струм зосереджений у центрі трубки струму, так що її центральну траєкторію можна розглядати як елементарний промінь. Струм  $p$ -трубки визначимо за формулою  $I_p = S_p J_p$ , де  $S_p$  – площа елементарного катода;  $J_p$  – густина струму емітера, яка залежить від зміни потенціалу поблизу катода за законом Чайлда-Ленгмюра (степеня 3/2) [3].

Рівняння неперервності заряду для дискретної моделі потоку запишемо так:

$$I_p = \text{const}, \quad p = 1, \dots, N^e. \quad (5)$$

Рівняння (1)–(5) утворюють замкнену систему. Щоб розв'язати задачу, треба відшукати розподіл потенціалу, густини струмів і об'ємних зарядів, розподіл траєкторій частинок тощо.

Перейдемо від фізичної моделі до математичної шляхом введення відповідних безрозмірних величин (див. [6]).

**Загальна схема розв'язування задачі.** Задачу (1)–(5) розв'яжемо шляхом послідовних наближень за об'ємним зарядом. Процес ітерацій почнемо з визначення поля за нульового значення заряду. Міжелектродний простір розіб'ємо на  $\bar{n}$  елементарних комірок  $\Omega_k$  об'ємом  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, \bar{n}$ , – циліндричних трубок висотою  $\Delta z_k$  і шириною  $\Delta r_k$ , одержаних обертанням навколо осі  $z$  прямокутників

$$\Omega_k = \left\{ r, z: r_k - \frac{1}{2} \Delta r_k \leq r \leq r_k + \frac{1}{2} \Delta r_k, \quad z_k - \frac{1}{2} \Delta z_k \leq z \leq z_k + \frac{1}{2} \Delta z_k \right\}$$

з центрами у точках  $(r_k, z_k)$ . Об'єм трубки

$$V_k = \pi ((r_k + 0,5 \Delta r_k)^2 - (r_k - 0,5 \Delta r_k)^2) \Delta z_k = 2 \pi r_k \Delta r_k \Delta z_k.$$

Усередині  $k$ -комірки є елемент, який моделює поле просторового заряду  $\bar{q}_k$ .

Частину заряду  $\bar{q}_{pk}$ , яку вносить  $p$ -промінь, обчислимо за формулою  $\bar{q}_{pk} = I_p t_{pk}$ , де  $t_{pk}$  – час перебування частинок  $p$ -променя у  $k$ -комірці. Загальний заряд  $\bar{q}_k^{(n+1)}$  наступного кроку ітераційного процесу одержимо, виконавши відповідне підсумовування за всіма траєкторіями, які проходять через  $V_k$ ,

$$\bar{q}_k^{(n+1)} = \sum_p I_p^{(n+1)} t_{pk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{q}_k^{(0)} = 0. \quad (6)$$

Задачу Діріхле (1)–(2) розв'яжемо за методом інтегральних рівнянь, записуючи її розв'язок у вигляді різниці потенціалів простого шару та об'ємного. Одержане інтегральне рівняння наближено розв'яжемо за методом квадратур на підставі формули Гаусса-Чебишова (Ерміта) (див. [6]).

Припустимо, що заряд  $\bar{q}_k^{(n)}$  у  $k$ -комірці після  $n$ -ітерації можна перетворити на розподілену густину об'ємного заряду  $\rho_k^{(n)} = \bar{q}_k^{(n)} / V_k$ . Розв'язавши задачу Діріхле (1)–(2), знайдемо потенціал, за значеннями якого проінтегруємо рівняння руху (3) (з урахуванням (4)) за методом типу предиктор-коректор Адамса-Башфорта-Мул-

тона четвертого порядку [6]. Далі, на підставі одержаних траєкторій струмів кожної трубки за рівнянням (6) визначимо новий розподіл заряду  $\bar{q}_k^{(n+1)}$ . Ітераційний процес, побудований на основі нижньої релаксації за густиною струму з прискоренням збіжності за Начамкіним-Хенкоком

$$\tilde{J}_p^{(n+1)} = \alpha_n \hat{J}_p^{(n)}, J_p^{(n+1)} = \omega_n \tilde{J}_p^{(n+1)} + (1 - \omega_n) J_p^{(n)},$$

$$J_p^{(0)} = 0, \omega_0 = 1, \omega_n = 2/3 \text{ для } n > 0,$$

де  $\omega_n$  – параметр релаксації,  $\hat{J}_p^{(n)}$  – густина  $p$ -трубки струму, визначена за законом Чайлда-Ленгмюра [3] (параметр  $\alpha_n$  визначений з умови, що потенціал задовільняє згаданий закон поблизу катода), продовжуватимемо доти, доки сусідні наближення струмів не збіжуться з заданою точністю  $\varepsilon$

$$\max_p \left| 1 - I_p^{(n+1)} / I_p^{(n)} \right| < \varepsilon, \varepsilon = 0.01.$$

**Результати обчислень.** Алгоритм реалізовано для 20 трубок струму з параметрами релаксації  $\omega_0 = 1, \omega_n = 0.7, n = 1, 2, \dots$ , кількість комірок, які моделюють просторовий заряд, 270. Траєкторії розраховували на відстані  $\bar{d}_0 = 0.15$ , крок за часом  $\Delta t = 0.005$ . Ітераційний процес збігається за дев'ять ітерацій. У табл. 1 наведено зниження потенціалу  $\mathcal{E}$  в трубці струму з максимальною густиною щодо лапласівського потенціалу, що дорівнює 6.83503 В, відносну похибку струму в цій трубці та середнє значення густини струму на кожній ітерації.

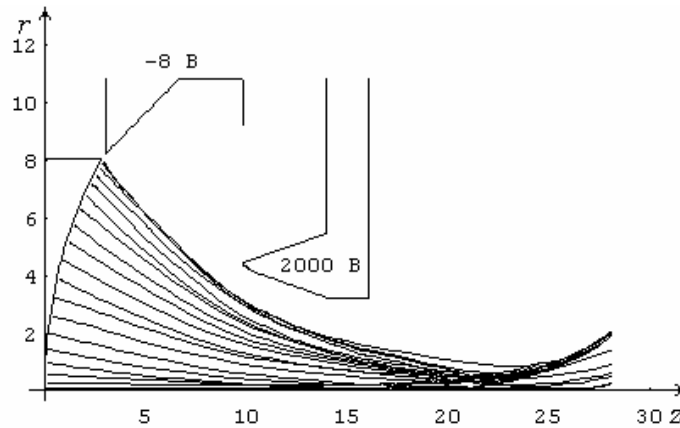


Рис. 1. Розподіл траєкторій електронів у пушці Пірса

Розрахований первеанс становить  $1.67884 \text{ А} \cdot \text{В}^{-3/2}$ , мінімум пучка досягається при  $z = 24.933 \text{ мм}$ ,  $r = 1.504 \text{ мм}$ . Ці результати цілком узгоджуються з характеристиками пушки. З огляду на запирання приосьових трубок струму просторовий

заряд враховували за наросуванням для кожних п'яти трубок з коефіцієнтами 0.25, 0.5, 0.75 та 1.0, чим і зумовлено менше значення первеансу.

Таблиця 1

Числові результати розрахунку пушки Пірса

$n$	$\alpha_n$	$\hat{u}^{(n)}(\vec{r}_{20}), \text{В}$	$\delta I_{20}, \%$	$J, \text{А/м}^2$
0	1.00000	—	—	—
1	0.38552	– 8.33796	56002.35179	1685.237
2	0.88699	– 3.93764	59.59599	706.524
3	1.13525	– 2.81670	17.45081	574.651
4	0.98145	– 3.30406	22.49601	623.572
5	1.02223	– 3.12035	5.93110	646.893
6	0.99669	– 3.02836	2.51578	682.799
7	1.00455	– 3.17220	1.25865	657.337
8	0.99977	– 3.18794	0.48818	667.557
9	1.00080	– 3.18267	0.20441	664.672

Властивості сформованого пучка описує фазова характеристика [4], побудована в поперечному фазовому просторі з координатами  $r, r' = dr/dz$  ( $r$  – радіальна координата траєкторії – трубки струму;  $r'$  – її нахил до осі пушки). На рис. 2 зображено фазові характеристики в площині кросовера пучка, які свідчать про достатню ламінарність пучка, зважаючи на порядок величин  $r'$ .

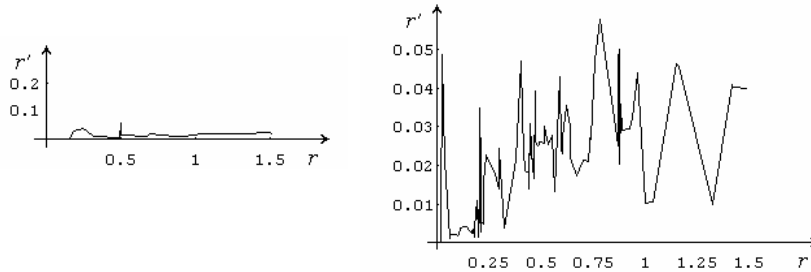


Рис. 2. Фазова характеристика електронного пучка в пушці Пірса за 20 (ліворуч) та 100 (праворуч) трубками струму (середньоквадратичний емітанс  $\bar{\epsilon} = 0.02149$ ,  $\bar{\epsilon} = 0.02985$ , відповідно)

Кількісну оцінку ступеня впорядкованості електронного потоку та якості його формування дає середньоквадратичний емітанс:

$$\bar{\epsilon} = \frac{4}{N^e} \sqrt{\left( \sum_{k=1}^{N^e} r_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^{N^e} r_k'^2 \right) - \left( \sum_{k=1}^{N^e} r_k r_k' \right)^2},$$

де  $r_k$  та  $r_k'$  – радіальна координата та нахил  $k$ -траєкторії – трубки струму; підсумовування виконане за всіма трубками струму.

Зазначимо, що середньоквадратичний емітанс ламінарного пучка, якому відповідає лінійна фазова характеристика, дорівнює нулю [4]. Відхилення фазової характеристики від лінійної (рис. 2) призводить до скінченного значення середньоквадратичного емітансу (табл. 2). Одержані значення свідчать про цілком прийнятний рівень ламінарності потоку заряджених частинок.

На відміну від задач з енергетичним розподілом потоку і потенціальною ямою поблизу катода, задач з гальмуванням чи вторинною емісією, у задачах з необмеженою емісійною здатністю емітера характер залежності густини розподілу просторового заряду  $\rho$  від потенціалу  $u$  суттєво відрізняється, що наочно ілюструє випадок плоскопаралельного діода [2], в якому  $\rho(u) \sim J(u)/\sqrt{u} \sim u$ , оскільки густина струму  $J \sim u^{3/2}$  за законом Чайлда-Ленгмюра, що “згладжує” загальний нелінійний характер впливу  $u$  на  $\rho$ .

Таблиця 2

### Характер залежності $\rho(u) = u^\kappa$ та емітанс пучки Пірса

$n$	$\kappa_{1,20}$	$\kappa_{2,20}$	$\bar{\varepsilon}_{20}$	$\kappa_{1,100}$	$\kappa_{2,100}$	$\bar{\varepsilon}_{100}$
1	0.77213	0.93581	0.00303	0.86278	1.00055	0.01178
2	0.45241	0.53585	0.10723	0.47164	0.51982	0.17255
3	0.65051	0.84835	0.00185	0.59366	0.78000	0.09238
4	0.48523	0.60001	0.03516	0.51791	0.63701	0.05591
5	0.54610	0.65231	0.02206	0.51072	0.59919	0.05347
6	0.51999	0.63711	0.02606	0.55573	0.65544	0.03735
7	0.51580	0.62856	0.02733	0.50876	0.60561	0.04121
8	0.52973	0.64178	0.02595	0.54749	0.63308	0.03405
9	0.52164	0.63703	0.02149	0.51784	0.60858	0.03132
10	–	–	–	0.52935	0.61524	0.03108
11	–	–	–	0.52438	0.61369	0.02951
12	–	–	–	0.52523	0.61136	0.02985

Використовуючи середнє арифметичне та середнє квадратичне наближення розрахованих потенціалу та густини просторового заряду за всіма комірками

$$\rho_1(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{q}_k}{V_k}; \quad \rho_1(u) = u^{\kappa_1}; \quad u = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\bar{n}} u_k; \quad (7)$$

$$\rho_2(u) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\bar{n}} \left( \frac{\bar{q}_k}{V_k} \right)^2}; \quad \rho_2(u) = u^{\kappa_2}; \quad u = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\bar{n}} u_k^2};$$

визначимо показник  $\kappa$  залежно від  $\rho(u) = u^\kappa$ .

Поряд з емітансом в табл. 2 відповідно до кількості трубок (20 та 100) наведено порядок залежності густини просторового заряду від потенціалу, обчислений за формулами (7). За збільшення кількості трубок струму до 100 відбувається незначне зростання показників залежності та емітансу. Кількість ітерацій збільшується до 20. Значення густини струму зростає до  $740.8117 \text{ A/m}^2$ .

Якщо у формулах (7) підсумовування виконувати за комірками з ненульовим зарядом, то у підсумку для 20 трубок струму отримаємо значення  $\kappa_1 = 0.81507$ ,  $\kappa_2 = 0.94081$ , а для 100 трубок –  $\kappa_1 = 0.76923$ ,  $\kappa_2 = 0.86108$ .

Отже, на прикладі реальної задачі підтверджено продуктивність.

розробленого підходу щодо розв'язування самоузгоджених задач електронної оптики. Розраховані фізичні показники електронно-оптичної системи пушки Пірса (первеанс, кросовер пучка, фазові характеристики, емітанс, порядок залежності густини розподілу просторового заряду від потенціалу тощо) досить добре описують фізичне явище. Пропонована математична модель відповідає розімкненим кусково-гладким ідеально провідним зарядженим поверхням, а чисельний алгоритм розв'язування самоузгодженої задачі дає змогу обчислювати високоградієнтні поля, що можна використати в процесі проектування пристроїв на основі великопотужних пучків заряджених частинок, для розв'язування нестационарних самоузгоджених задач, задач з урахуванням зовнішнього магнітного поля системи, власного магнітного поля пучка тощо.

1. *Алямовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки. – М.: Сов. радио, 1966. – 456 с.
2. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985. – 334 с.
3. *Кириштейн П.Т., Кайно Г.С., Уотерс У.Е.* Формирование электронных пучков. – М.: Мир, 1970. – 600 с.
4. *Молоковский С.И., Сушков А.Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
5. *Монастырский М.А., Тарасов В.А., Муравьев А.Г.* Численное решение самосогласованной задачи расчета электронных пушек в прикатодной области методом итераций // Прикладная физика. 1998. № 2. С. 23-32.
6. *Остудін Б., Романенко А.* Розрахунок руху пучка заряджених частинок в електростатичному полі з урахуванням просторового заряду // Теоретична електротехніка. 2002. № 56. С. 87-103.
7. *Рошаль А.С.* Моделирование заряженных пучков. – М.: Атомиздат, 1979. – 224 с.
8. *Рудаков Л.И.* Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 279 с.

---

**MOTION OF ELECTRON BEAM IN A SELF-CONSISTENT FIELD  
OF A SPHERICAL PIERCE GUN**

B. Ostudin, A. Romanenko

*Ivan Franko National University of Lviv  
Universytetska St., 1, L'viv, UA-79000, Ukraine,  
e-mail: kom@franko.lviv.ua*

The motion of a space-charged limited beam is numerically simulated. Developed algorithm to solve self-consistent problems of electronic optics [6], which was built via the integral equation method, has been used to form a heavy-current electron beam in a spherical Pierce gun [1]. The perveance and beam-crossover region have been calculated. The phase beam characteristics have been built. Based on a root-mean-square emittance the quantitative estimation of the flow degree orderliness and formation beam quality have been determined. The order dependence of the distribution space-charged density from the potential has been specified. Obtained results agree well with the gun characteristics.

*Key words:* self-consistent problem of electronic optics, space-charge limited beam, integral equation method

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2004

Прийнята до друку 04.06.2004