

УДК 621.313.32

АПРОКСИМАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАМАГНІЧУВАННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СТАЛЕЙ

В. Маляр, А. Маляр, Д. Гречин

*Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна*

Розглянуто питання вибору способу апроксимації характеристик намагнічування електротехнічних сталей. Запропоновано раціональні методи побудови сплайн-апроксимацій.

Ключові слова: апроксимація, крива намагнічування електротехнічної сталі.

Оптимізація обчислювального процесу в цілому залежить від раціонального вибору окремих обчислювальних процедур, однією з яких є апроксимація різноманітних нелінійних залежностей. Зокрема, багато задач у царині нелінійної електротехніки неможливо розв'язати з достатньою точністю без урахування насиченості магнітопроводів електротехнічних пристроїв. Для цього необхідно будувати апроксимації для таблично заданих характеристик намагнічування (ХН) електротехнічних сталей або ділянок магнітопроводу, які мають експериментальне походження. Від точності та способу зображення цих кривих нерідко залежить успіх розв'язування сформульованої задачі в цілому [16], тому питання апроксимації ХН має важливе значення.

Способів апроксимації ХН є досить багато [1–6, 8, 9, 11–13, 15 та ін.]. Їх розвивали і вдосконалювали протягом багатьох років відповідно до зміни вимог, які до них ставили. Однак досі цю проблему не можна вважати вирішеною, про що свідчать численні публікації, кількість яких продовжує зростати [6, 15].

Відомі способи зображення ХН можна розділити на такі:

- а) апроксимації однією аналітичною функцією на всьому інтервалі зміни аргументу [1–5];
- б) апроксимації одним поліномом високого степеня, який проходить через усі вузлові точки [5, 11];
- в) апроксимації кількома поліномами невисоких порядків або іншими функціями [2, 5, 9];
- г) кусково–лінійні апроксимації [7];
- д) апроксимації сплайнами [1, 6, 9, 12, 13].

Розглянемо кожен з них з погляду ефективності їхнього використання для математичного моделювання процесів в електротехнічних пристроях з феромагнітними елементами.

Апроксимація одним аналітичним виразом є проста, однак має надто низьку точність, її використання може бути зумовлене лише необхідністю отримати аналітичний розв'язок задачі.

Апроксимація одним степеневим поліномом (наприклад, Лагранжа), який збігається із заданими значеннями ХН у вузлових точках, достатньо проста, однак поліном такого типу має так звані осциляції (хвилястість), що призводить до ще більших осциляцій похідної. А це спричинює розбіжність ітераційних процесів.

У разі апроксимації кривої кількома поліномами, як, звичайно, невисокого степеня, точність достатньо висока, але в точках стикування крива має розриви похідних. Аналогічні недоліки має і кусково-лінійна апроксимація.

Вимоги до апроксимацій ХН. У випадку ручних розрахунків головна вимога – це простота апроксимуючого виразу, що досягалось зниженням точності відтворення ХН. У разі розв'язування задач на ЕОМ на перший план стають дві вимоги: висока точність і наявність достатньої кількості неперервних похідних на всьому проміжку зміни аргументу ХН.

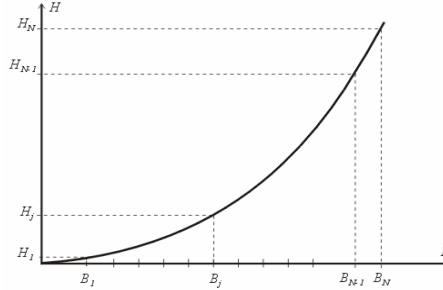
Зазначимо, що в разі математичного моделювання як статичних характеристик, так і динамічних режимів електротехнічних пристроїв використовують не тільки ХН, а й їхні похідні. Зокрема, в разі використання ітераційного методу Ньютона для розрахунку ustalених режимів та статичних характеристик електричних машин [7] використовують першу похідну ХН, а за наявності розривів або осциляцій похідної практично неможливо досягнути збіжності ітераційного процесу. Більшість методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, які використовують для розрахунку перехідних процесів в електротехнічних пристроях, потребують наявності неперервних похідних не тільки першого, а й вищих порядків. За наявності розривів у похідній ХН відбувається необгрунтоване дроблення кроку інтегрування, зумовлене невідповідністю вибраного способу апроксимації чисельному методу інтегрування ДР.

Інтерполяційний кубічний сплайн ХН. Перелічених вище недоліків не мають апроксимації ХН сплайнами, зокрема третього порядку [6, 9, 11], однак властивості таких апроксимацій залежать від способу їхньої побудови. Розглянемо питання побудови кубічного сплайна для ХН, заданої у вигляді $H=H(B)$. Для цього розіб'ємо весь інтервал зміни аргументу B (див. рисунок) на N ділянок, необов'язково рівномірних. Як відомо, в разі практичних розрахунків першу ділянку $[B_0, B_1]$ (при малих насиченнях) та останню $[B_{N-1}, B_N]$ (при сильних насиченнях) приймають лінійними. Тому точка B_1 відповідає кінцю першої, в точка B_{N-1} – початку останньої прямолінійних ділянок. Отже, необхідно побудувати сплайн на інтервалі $[B_1, B_{N-1}]$.

Запишемо сплайн для j -ї ділянки ХН у вигляді

$$H(B) = a + b(B - B_j) + c(B - B_j)^2 + d(B - B_j)^3, \quad (1)$$

де j – номер ділянки, який відповідає номеру вузла на її правій границі; B_j – значення аргументу в цьому вузлі; a_j, b_j, c_j, d_j – коефіцієнти сплайна.



Характеристика намагнічування електротехнічної сталі

Перша та друга похідні сплайна (1) мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dB} &= -b_j - 2c_j(B_j - B) - 3d_j(B_j - B)^2; \\ \frac{d^2H}{dB^2} &= 2c_j + 6d_j(B_j - B). \end{aligned} \quad (2)$$

Для першої ділянки і останньої, як лінійних, сплайн має вигляд

$$H_1(B) = a_1 + b_1(B_1 - B); \quad H_N(B) = a_N + b_N(B_N - B). \quad (3)$$

Запишемо необхідні для обчислення коефіцієнтів сплайна рівняння. Для цього підставимо в (1) та (2) значення B_j та B_{j-1} аргументу B , відповідно, на правій та лівій границях j -ї ділянки:

$$\begin{aligned} H(B_j) &= H_j = a_j; & H(B_{j-1}) &= H_{j-1} = a_j + b_j h_j^2 + d_j h_j^3; \\ \left. \frac{dH}{dB} \right|_j &= -b_j; & \left. \frac{dH}{dB} \right|_{j-1} &= -b_j - 2c_j h_j - 3d_j h_j^2; \\ \left. \frac{d^2H}{dB^2} \right|_j &= 2c_j; & \left. \frac{d^2H}{dB^2} \right|_{j-1} &= 2c_j + 6d_j h_j, \end{aligned} \quad (4)$$

де $h_j = B_j - B_{j-1}$ – довжина j -ї ділянки.

Для першої і останньої ділянок друга похідна дорівнює нулю, тому

$$c_1 = 0; \quad d_1 = 0; \quad c_N = 0; \quad d_N = 0. \quad (5)$$

З умови неперервності сплайна та збіжності зі значеннями ХН у вузлах отримаємо $2N$ рівнянь вигляду

$$a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = a_{j-1}, \quad (j = \overline{1, N}); \quad (6a)$$

$$a_j = H_j; \quad (j = \overline{1, N}). \quad (6b)$$

Від вибору значень вагових коефіцієнтів p_j залежить ступінь наближення згладжувального сплайна до вузлових значень. За достатньо великих числових значень p_j згладжувальний сплайн практично проходить через задані вузлові точки.

Апроксимація ХН ермітовими кубічними сплайнами. Для розв'язування багатьох задач [7] достатньо, щоб ХН мала неперервну лише першу похідну. Для таких випадків пропонують [13] використовувати кубічний сплайн дефекту 2 (сплайн Ерміта).

Кубічний сплайн Ерміта дефекту 2 у цьому випадку – це функція $H=H(B)$, неперервна разом з першою похідною на всьому діапазоні зміни аргументу B , яка збігається з поліномом третього ступеня на кожній ділянці $[B_{j-1}, B_j]$ і задовольняє умови

$$H(B_j) = H_j; \quad \left. \frac{dH}{dB} \right|_j = \frac{d(H(B_j))}{dB_j}. \quad (14)$$

Для побудови такого сплайна необхідно мати значення похідної в кожному внутрішньому вузлі. Оскільки в таблицях задають тільки значення H_j функції, то її похідну необхідно попередньо визначити за однією з формул чисельного диференціювання [10], наприклад,

$$\left. \frac{dH}{dB} \right|_j = \frac{H_{j+1} - H_{j-1}}{B_{j+1} - B_{j-1}}. \quad (15)$$

З урахуванням (10), (11) коефіцієнти сплайна Ерміта визначають за формулами

$$\begin{aligned} a_j &= H_j; \quad b_j = - \left. \frac{dH}{dB} \right|_j; \\ c_j &= \frac{3}{h_j^2} (H_{j-1} - H_j) + \frac{1}{h_j} \left(\left. \frac{dH}{dB} \right|_{j-1} + 2 \left. \frac{dH}{dB} \right|_j \right); \\ d_j &= - \frac{2}{h_j^3} (H_{j-1} - H_j) - \frac{1}{h_j^2} \left(\left. \frac{dH}{dB} \right|_{j-1} + \left. \frac{dH}{dB} \right|_j \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Підставимо (12) в (1) і отримаємо вираз для обчислення сплайна на j -й ділянці

$$\begin{aligned} H(B) &= (1-A)^2 (1+2A)H_j + A^2 (3-2A)H_{j-1} + A^2 (1-A)h_j H'_{j-1} - \\ &- (1-A)^2 h_j H'_j, \end{aligned} \quad (17)$$

де $A=(B_j-B)/h_j$; H'_j – значення похідної dH/dB в j -му вузлі.

Як бачимо, для побудови сплайна необхідно в пам'яті машини мати масиви значень функції та її похідних. У цьому разі сітку вузлів ліпше брати рівномірною, хоча щодо кількості вузлів рівномірна сітка не оптимальна. Однак у цьому випадку більш економічною є процедура пошуку необхідної ділянки в разі обчислення значення сплайна для заданого значення аргументу ХН.

Насамкінець зазначимо, що ермітові сплайни третього порядку дефекту 2 при відповідному виборі сітки вузлів практично не мають осциляцій і стійкі до розкиду вхідних даних. Недоліком їх є необхідність визначення похідних у вузлах сітки та

розривність вищих похідних у вузлах. Для вирішення першої з цих проблем необхідно використовувати для обчислення похідних у вузлах (де можливо) точніші формули, ніж (11).

Отже, питання апроксимації ХН електротехнічних сталей має принципове значення під час розв'язування задач аналізу процесів в електротехнічних пристроях з феромагнітними елементами, оскільки від способу зображення цих кривих нерідко залежать не тільки кількісні, а й якісні результати розв'язування задач у цілому.

Описати ХН одним аналітичним виразом на всьому інтервалі зміни аргументу з достатньою точністю неможливо, а поліном високого степеня, який проходить через усі вузлові точки, має осциляції як функції, так і похідної. Апроксимація кількома звичайними поліномами невисокого степеня або іншими функціями має розриви похідних у вузлах їхнього стикування.

Найповніше задовольняють вимоги високої точності апроксимації ХН і неперервності та плавності зміни похідних кубічні сплайни (дефекту 1), алгоритм побудови яких з урахуванням лінійності ХН на початку та в кінці кривої викладений у статті. Однак таблично задані ХН мають експериментальне походження, і інтерполяційний сплайн має осциляції. Уникнути їх можна лише попереднім згладжуванням експериментальних даних.

Ефективнішим є представлення ХН згладжувальним кубічним сплайном, який проходить не через вузлові точки, а найліпше (в певному сенсі) наближається до них. Викладений у статті метод побудови згладжувального кубічного сплайна поєднує в собі згладжування за методом найменших квадратів та інтерполяцію.

У тих випадках, коли для розрахунку режимів роботи електротехнічних пристроїв використовують лише першу похідну ХН, доцільно застосовувати кубічні сплайни (дефекту 2), алгоритм побудови яких викладений у статті.

1. *Аракелян А.К., Дмитриев Г.Н.* К вопросу об аппроксимации характеристик холостого хода электрических машин // Разработка и исследование специальных электрических машин. Куйбышев: Куйб. политехн. ин-т, 1987. С. 126 – 136.
2. *Аронов Р.Л.* Аппроксимирование кривой намагничивания // Электричество. 1948. №4. С. 37–41.
3. *Архангельский Б.И.* Аналитическое выражение кривой намагничивания машины // Электричество. 1950. №3. С. 30–32.
4. *Бамдас А.М.* Определение степенного полинома для аппроксимации основной кривой намагничивания // Изв. вузов. Электромеханика. 1966. №12. С. 1293 – 1296.
5. *Бруевич А.Н., Евтянов С.И.* Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. М.: Сов. радио, 1965. 344 с.
6. *Гололобов В.В., Рымиа В.В., Меркулов И.В., Порайко А.С.* Представление кривых намагничивания в численных расчетах магнитного поля // Электромашинобудування та електрообладнання. 1999. Вип. 5. С. 81–85.
7. *Глухивский Л.И., Фильц Р.В., Маляр В.С.* Расчет на ЦВМ установившихся режимов работы насыщенных явнополюсных синхронных машин

- итерационным методом Ньютона // Изв. вузов. Электромеханика. 1976. № 4. С. 391–398.
8. *Зилес Л.Д.* О подавлении феррорезонанса трансформатора напряжения 110–500 кВ // Электричество. 1986. №12. С. 12–16.
 9. *Золотарев Н.А.* Кусочно–полиномиальная аппроксимация характеристик намагничивания // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1981. №3. С. 237–242.
 10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
 11. *Кузовлева Ф.Я., Пеккер И.И.* Аппроксимация кривых намагничивания при расчетах на ЭЦВМ // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1965. №6. С. 611–614.
 12. *Маляр В.С., Фильц Р.В.* Аппроксимация характеристик намагничивания сплайнами // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1977. № 11. С.119–121.
 13. *Маляр В.С., Шегедин А.И.* Выбор и построение сплайн–аппроксимаций характеристик намагничивания // Тез. докл. II Всесоюз. науч.– техн. конф. “Проблемы нелинейной электротехники”. Ч.1. К.: Наук. думка. 1984. С. 194–196.
 14. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
 15. *Оганян Р.В.* Аппроксимация кривой намагничивания стали квадратичной функцией // Электричество. 1998. № 4. С. 70–73.
 16. *Синицький Л.А., Смаль І.В.* Вплив апроксимації кривої намагнічування на результати розрахунку феррорезонансу у RLC контурі // Вісн. НУ "Львівська політехніка" Електроенергетичні та електромеханічні системи. 2001. Вип. 418. С. 153–158.

APPROXIMATION OF MAGNETIZATION CURVES OF ELECTROTECHNICAL STEELS

V. Malyar, A. Malyar, D. Gretchyn

*Lviv Polytechnic National University
12 Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine*

Problems of approach choice for approximation of magnetization curves of electrotechnical steels are considered. A rational methods of spline–approximation construction are proposed.

Key words: approximation, magnetization curve, electrotechnical steel.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2004
Прийнята до друку 04.06.2004