

УДК 519.622.2

## ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ ОЦІНЮВАННЯ ЛОКАЛЬНИХ ПОХИБОК, ЩО ВИНИКАЮТЬ У ПРОЦЕСІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Я. Кость, І. Хвищун, Я. Шмигельський

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна  
[kostjerry@gmail.com](mailto:kostjerry@gmail.com)*

Розглянуто алгоритми оцінювання локальних похибок усікання для найпоширеніших методів інтегрування рівнянь математичних моделей. Запропоновано спосіб числової реалізації такого оцінювання для неявного методу трапецій. Наведено серію тестових задач з різними коефіцієнтами жорсткості, для яких відомі аналітичні розв'язки. Ці задачі розв'язано різними методами інтегрування рівнянь математичних моделей. Проаналізовано точність розглянутих алгоритмів оцінювання локальних похибок та зроблено висновки про їхню ефективність.

*Ключові слова:* математичне моделювання, локальна похибка усікання, методи інтегрування.

У процесі числового інтегрування рівнянь математичних моделей (ММ) динамічних систем є декілька категорій похибок: похибка введення початкових умов (ПУ)  $\eta$ , похибка методу  $T$  та похибка заокруглення  $\delta$  [1].

*Похибка введення початкових умов* виникає тоді, коли ПУ, які необхідні для розв'язування задачі Коші, отримано експериментально чи внаслідок розв'язування іншої задачі. Наприклад, ПУ для моделювання динаміки електронних схем беруть на підставі розрахунку їхнього статичного режиму. Ця похибка не залежить від вибору числового методу інтегрування рівнянь моделі. Якщо початкові умови містять похибку, то числовий метод розраховуватиме розв'язок  $x_0(t)$ , який відповідає заданим ПУ та апіорі не збігається з розв'язком  $x(t)$ , який цікавить дослідника насправді:

$$\eta_{m+1} = x(t_{m+1}) - x_0(t_{m+1}),$$

де  $m$  – номер кроку інтегрування.

Відомо, що більшість числових методів інтегрування систем диференціальних рівнянь утворюють дискретизацією неперервного розв'язку задачі Коші за допомогою його розкладання в ряд Тейлора з подальшою заміною частини членів ряду певним інтерполяційним виразом, який з деякою точністю наближає шуканий розв'язок і не потребує обчислення вищих похідних.

З огляду на скінченність будь-яке таке наближення відрізняється від точного розв'язку на величину, яку називають *похибкою методу*. У літературі цю похибку називають також *похибкою усікання (truncation error)* [6]. Наприклад, для методів, утворених

розкладанням у ряд Тейлора, похибка усікання  $T_{m+1} = O(h^{k+1})$ , де  $k$  – порядок точності методу.

Похибки заокруглення виникають унаслідок скінченності розрядної сітки комп'ютера та мають порядок  $\delta_{m+1} = O(10^{-(r+1)})$ , де  $r$  – максимальна кількість знаків після коми дійсного числа, яку може зберегти комп'ютер.

Оцінка похибок є корисною з декількох причин [8]: знання похибок забезпечує впевненість у достовірності результатів інтегрування, дає нам змогу уточнити отриманий розв'язок, а також керувати значенням кроку  $h$  для поліпшення ефективності інтегрування. Особливо корисна оцінка похибок для задач, ММ яких є жорсткими, де автоматичний вибір оптимального кроку може суттєво прискорити процес інтегрування.

Важливим критерієм ефективності оцінювання похибок є кількість додаткових обчислень, які потребує процес одержання таких оцінок. Завжди намагаються мінімізувати кількість додаткових обчислень та оцінювати похибку на підставі тих даних, які використовує обраний метод інтегрування.

Нижче досліджено способи оцінювання локальної похибки для таких найвідоміших методів інтегрування рівнянь ММ:

- неявний метод Ейлера (НЕ);
- метод Шичмена (Ш) [9];
- метод Адамса–Маултона другого порядку точності (неявний метод трапецій) (AM2).

Нижче наведено алгоритми оцінювання похибок, які ми реалізували.

НЕ та Ш є методами формул диференціювання назад (ФДН), відповідно, першого та другого порядків точності. Тому можна використати формулу, наведену в праці [2]:

$$T_{m+1} = \frac{h_{m+1}}{t_{m+1} - t_{m-k}} (x_{m+1} - x_{m+1}^0), \quad (1)$$

де  $x_{m+1}^0$  – прогнозоване значення розв'язку;  $x_{m+1}$  – прогнозоване значення розв'язку, скориговане ітераційним процесом Ньютонa;  $k$  – порядок точності методу.

Необхідно пам'ятати: для того, щоб працювала формула (1), необхідно застосовувати формули прогнозу, наведені в праці [2].

У [7] наведено вираз для локальної похибки усікання методу трапецій:

$$T_{m+1} = -\frac{h_{m+1}^3}{12} \ddot{x}(\tau), \quad (2)$$

де  $\tau \in [t_m, t_{m+1}]$ .

У праці [7] для оцінки похибок віднімають обчислене значення від точного, а в [2] роблять навпаки. Щоб характер похибок збігався для різних методів, ми для всіх випадків оцінювання похибок віднімали точне значення від наближеного. Перепишемо формулу (2) з урахуванням цієї особливості:

$$T_{m+1} = \frac{h_{m+1}^3}{12} \ddot{x}(\tau). \quad (2a)$$

У [9] Шичмен апроксимує  $\ddot{x}(\tau)$  розділеними різницями. Ми застосували аналогічний принцип до формули (2a) та отримали вираз для оцінки локальної похибки методу трапецій:

$$\begin{aligned}
T_{m+1} &= k_0 3! [k_1(x_{m+1} - x_m) + (k_2 + k_3)(x_m - x_{m-1}) + k_4(x_{m-1} - x_{m-2})]; \\
d_1 &= h_{m+1} h_m (h_{m+1} + h_m)(h_{m+1} + h_m + h_{m-1}); \\
d_2 &= h_m h_{m-1} (h_m + h_{m-1})(h_{m+1} + h_m + h_{m-1}); \\
k_0 &= \frac{h_{m+1}^3}{12}; \quad k_1 = \frac{h_m}{d_1}; \quad k_2 = -\frac{h_{m+1}}{d_1}; \quad k_3 = -\frac{h_{m-1}}{d_2}; \quad k_4 = \frac{h_m}{d_2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки метод трапецій є однокроковим, то для нього зазвичай використовують лінійний прогноз. Проте формула (3) потребує зберігання точки  $x_{m-2}$ . Тому доцільніше використати параболічний прогноз, який у випадку постійного кроку інтегрування виглядає так:

$$x_{m+1}^0 = 3x_m - 3x_{m-1} + x_{m-2}. \tag{4}$$

Параболічний прогноз використовують також для методу Шичмена. Для НЕ застосовують лінійний прогноз, який у випадку постійного кроку інтегрування виглядає так:

$$x_{m+1}^0 = 2x_m - x_{m-1}.$$

За допомогою програмного забезпечення для моделювання динамічних систем [4] ми реалізували описані методи інтегрування разом із визначенням локальних похибок та провели тестування на задачах 2л, С2 та С3. Нелінійні задачі С2 та С3 [3] з коефіцієнтом жорсткості [4]  $S = 10^4$  та різними ступенями впливу повільних компонент розв'язку на швидкі формулюють такою системою:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + 2, \\
\dot{x}_2 &= a^2 x_1^2 - \lambda_2 x_2, \\
\dot{x}_3 &= a^3 (x_1^2 + x_2^2) - \lambda_3 x_3.
\end{aligned}$$

Значення коефіцієнтів:  $\lambda_2 = 10^2, \lambda_3 = 10^4$ . Інтегрування проводять на проміжку  $t \in [0; 10]$  з початковими умовами  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1.0$ . Для задачі С2  $a = 10$ , для задачі С3  $a = 100$ . Аналітичний розв'язок системи має вигляд [3]

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -e^{-t} + 2, \\
x_2(t) &= C_2 e^{-\lambda_2 t} + a^2 \left( \frac{e^{-2t}}{\lambda_2 - 2} - \frac{4e^{-t}}{\lambda_2 - 1} + \frac{4}{\lambda_2} \right), \\
x_3(t) &= C_3 e^{-\lambda_3 t} + a^3 \left[ \frac{e^{-2t}}{\lambda_3 - 2} - \frac{4e^{-t}}{\lambda_3 - 1} + \frac{4}{\lambda_3} + C_2^2 \frac{e^{-2\lambda_2 t}}{\lambda_3 - 2\lambda_2} \right] + \\
&+ 2C_2 a^5 \left[ \frac{e^{-(\lambda_2 + 2)t}}{(\lambda_2 - 2)(\lambda_3 - \lambda_2 - 2)} - \frac{4e^{-(\lambda_2 + 1)t}}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - \lambda_2 - 1)} + \frac{4e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_2)} \right] + \\
&+ a^7 \left[ \frac{e^{-4t}}{(\lambda_2 - 2)^2(\lambda_3 - 4)} + \frac{16e^{-2t}}{(\lambda_2 - 1)^2(\lambda_3 - 2)} + \frac{16}{\lambda_2^2 \lambda_3} - \right. \\
&\left. - \frac{8e^{-3t}}{(\lambda_2 - 2)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 3)} + \frac{8e^{-2t}}{\lambda_2(\lambda_2 - 2)(\lambda_3 - 2)} - \frac{32e^{-t}}{\lambda_2(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)} \right].
\end{aligned}$$

Коефіцієнти  $C_2$  та  $C_3$  необхідно обирати такими, щоб  $x_2(0) = x_3(0) = 1.0$ . Обчислені нами значення цих коефіцієнтів є такими:

– для задачі С2:

$$C_2 \approx 0,019996, C_3 \approx 0,800020;$$

– для задачі С3:

$$C_2 \approx -97,000412, C_3 \approx -200,938384.$$

Задачу 2л взято із серії 1-5л [5]. Загальна форма запису для цієї серії така:

$$\dot{x}_0 = \mu_0 x_0,$$

$$\dot{x}_1 = (\mu_0 - \mu_1)x_0 + (\mu_1 + \nu_1)x_1 - \nu_1 x_2,$$

$$\dot{x}_2 = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1)x_0 + 2\nu_1 x_1 + (\mu_1 - \nu_1)x_2,$$

$$\dot{x}_3 = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1)x_0 + 2\nu_1 x_1 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2)x_2 + (\mu_2 + \nu_2)x_3 - \nu_2 x_4,$$

$$\dot{x}_4 = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1)x_0 + 2\nu_1 x_1 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2 - \nu_2)x_2 + 2\nu_2 x_3 + (\mu_2 - \nu_2)x_4.$$

Інтегрування проводять на проміжку  $t \in [0;3]$ . Власні числа системи

$$\lambda_1 = \mu_0; \lambda_{2,3} = \mu_1 \pm i\nu_1; \lambda_{4,5} = \mu_2 \pm i\nu_2.$$

Аналітичний розв'язок системи такий:

$$x_0(t) = e^{\mu_0 t} x_0(0),$$

$$x_1(t) = e^{\mu_0 t} x_0(0) + e^{\mu_1 t} (x_1(0) - x_0(0)) \cos(\nu_1 t) + e^{\mu_1 t} (x_1(0) - x_2(0)) \sin(\nu_1 t),$$

$$x_2(t) = e^{\mu_0 t} x_0(0) + e^{\mu_1 t} (x_2(0) - x_0(0)) \cos(\nu_1 t) + e^{\mu_1 t} (2x_1(0) - x_0(0) - x_2(0)) \sin(\nu_1 t),$$

$$x_3(t) = x_2(t) + e^{\mu_2 t} (x_3(0) - x_2(0)) \cos(\nu_2 t) + e^{\mu_2 t} (x_3(0) - x_4(0)) \sin(\nu_2 t),$$

$$x_4(t) = x_2(t) + e^{\mu_2 t} (x_4(0) - x_2(0)) \cos(\nu_2 t) + e^{\mu_2 t} (2x_3(0) - x_2(0) - x_4(0)) \sin(\nu_2 t).$$

Значення коефіцієнтів для задачі 2л (нежорстка  $S = 10$ )

$$\mu_0 = -2; \mu_1 = 1; \mu_2 = -1; \nu_1 = 1; \nu_2 = 10;$$

$$x_0(0) = 1; x_1(0) = x_2(0) = 1.5; x_3(0) = x_4(0) = 2,5;$$

$$\lambda_1 = -2; \lambda_{2,3} = 1 \pm i; \lambda_{4,5} = -1 \pm 10i.$$

Ми зафіксували крок інтегрування  $h = 10^{-4}$  та проінтегрували задачі 2л, С2 та С3 такими методами:

- неявним методом Ейлера (НЕ). Вираз оцінки локальної похибки для постійного кроку інтегрування:

$$T_{m+1} = \frac{1}{2} (x_{m+1} - x_{m+1}^0);$$

- методом Адамса–Маултона другого порядку точності (AM2). Використавши (3) і (4) та врахувавши постійний крок інтегрування, отримуємо вираз оцінки локальної похибки:

$$T_{m+1} = \frac{1}{12} (x_{m+1} - x_{m+1}^0);$$

- методом Шичмена (Ш). У [9] Шичмен навів власну формулу для оцінки локальної похибки, яка для постійного кроку інтегрування має вигляд

$$T_{m+1} = \frac{2}{9}(x_{m+1} - x_{m+1}^0).$$

Проте якщо оцінювати локальну похибку за формулою (1), то отримуємо вираз

$$T_{m+1} = \frac{1}{3}(x_{m+1} - x_{m+1}^0). \quad (5)$$

У наших дослідженнях використано формулу (5).

Інструментом для тестування було наше програмне забезпечення для моделювання динамічних систем із жорсткими математичними моделями [4].

Значення допустимої похибки  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Ми використовували його в усіх інтеграторах для визначення моменту завершення ітераційного процесу Ньютона, а також для обчислення матриці Якобі системи диференціальних рівнянь.

Якщо узагальнити розглянуті методи інтегрування формулою

$$x_{m+1} = F(\dot{x}_{m+1}, \dot{x}_m, x_m, x_{m-1}, h),$$

то точну локальну похибку усікання  $T_{m+1}^*$  можна визначити так:

$$T_{m+1}^* = F(\dot{x}(t_{m+1}), \dot{x}(t_m), x(t_m), x(t_{m-1}), h) - x(t_{m+1}),$$

де  $\dot{x}(t_m)$  – точне значення похідної розв'язку в точці  $t_m$ ,  $x(t_m)$  – точне значення розв'язку в точці  $t_m$ .

На рис. 1–9 зображено графіки відхилень оцінок локальних похибок усікання від точних локальних похибок  $T_{m+1} - T_{m+1}^*$  (ліворуч) та графіки точних глобальних похибок (праворуч) для розглянутих методів інтегрування різних тестових задач. Деякі графіки показані на меншому проміжку, ніж проміжок інтегрування, щоб ліпше відобразити найбільш вагомий ділянки графіка.

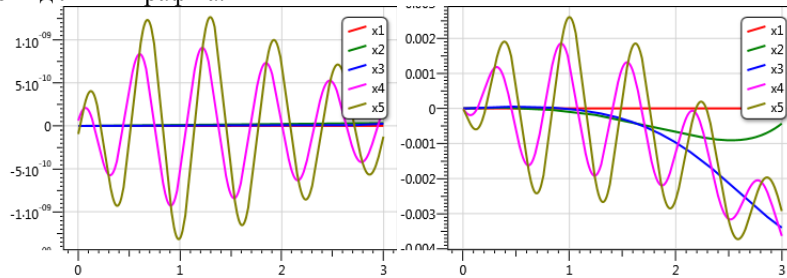


Рис. 1. Задача 2л. Метод НЕ.

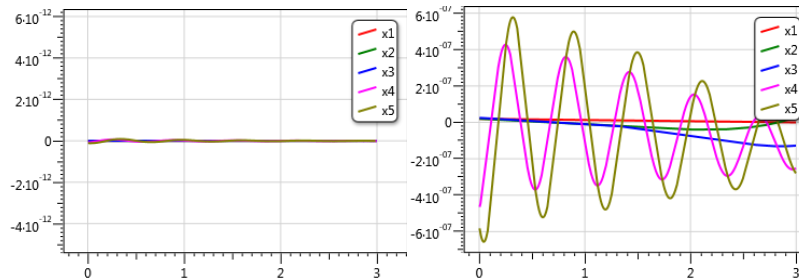


Рис. 2. Задача 2л. Метод АМ2.

Оскільки ми використовували неявні методи, які потребують початкового розгону, то перші точки розв'язку містили неприйнятну відповідним методам похибку, яка спотворювала графіки через великий перепад масштабів. Щоб запобігти цьому, ми не виводили на графіки перші десять точок.

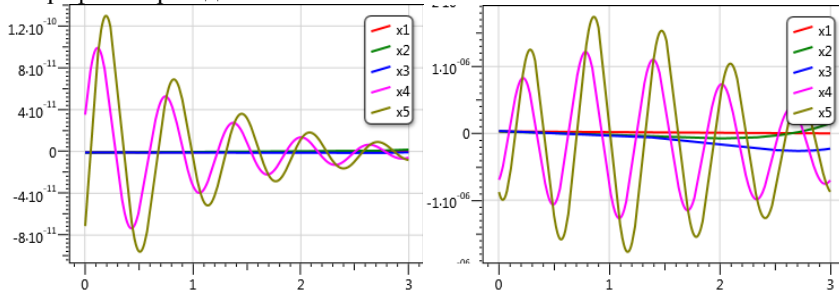


Рис. 3. Задача 2л. Метод Ш.

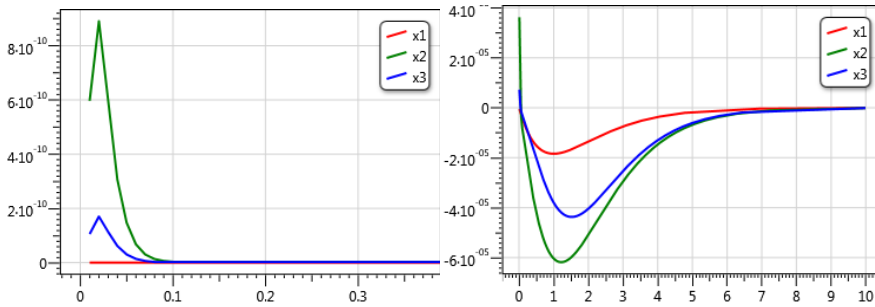


Рис. 4. Задача С2. Метод HE.

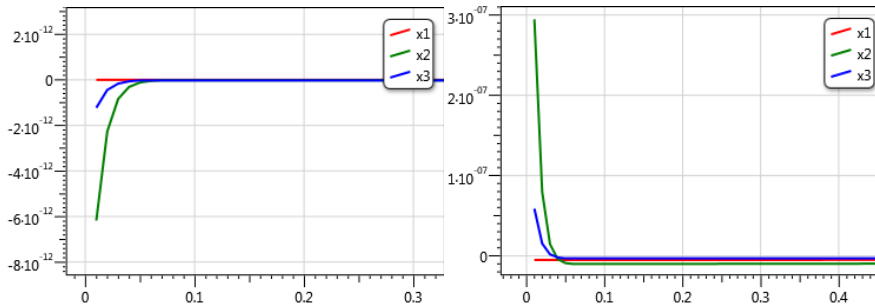


Рис. 5. Задача С2. Метод AM2.

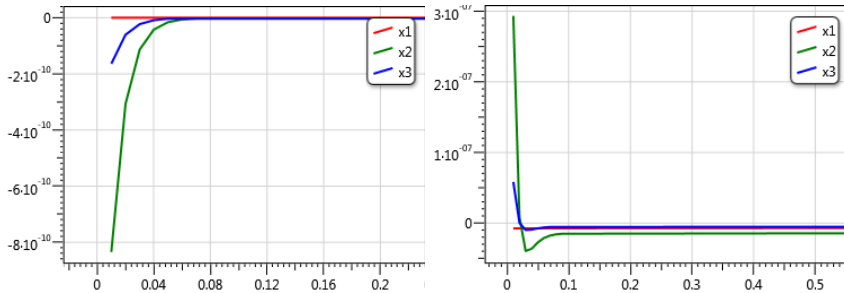


Рис. 6. Задача С2. Метод Ш.

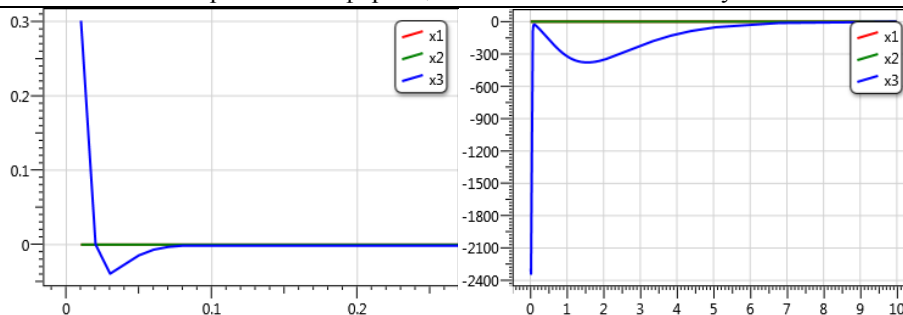


Рис. 7. Задача С3. Метод НЕ.

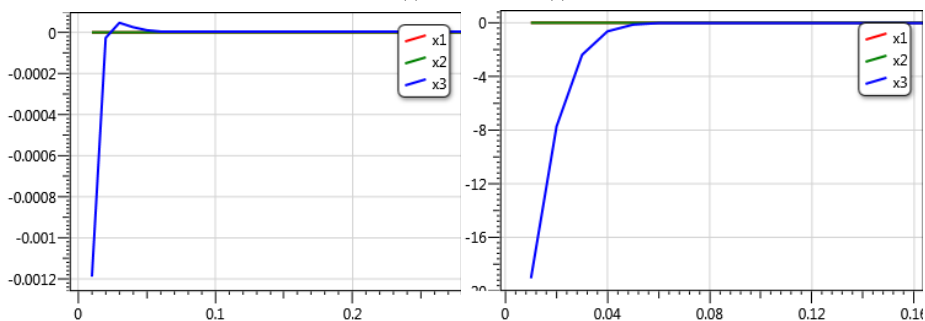


Рис. 8. Задача С3. Метод АМ2.

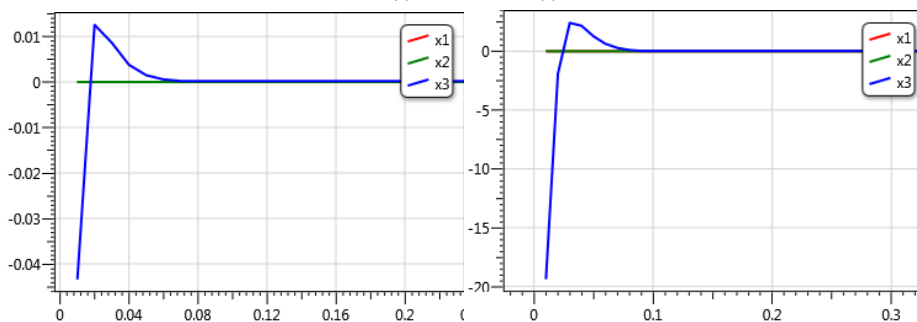


Рис. 9. Задача С3. Метод ІІІ.

З аналізу отриманих результатів випливає таке:

- запропонований спосіб оцінки локальної похибки методу трапецій працює добре навіть на задачах з великою жорсткістю. Недоліком цього способу є те, що потрібно зберігати додаткову точку розв'язку. Така його особливість може мати негативний вплив на швидкість розв'язання систем дуже великих розмірів;
- характери змін оцінок локальних похибок якісно збігаються з характеристиками змін точних локальних похибок для розглянутих задач і методів;
- найточніше з заданим постійним кроком інтегрує метод трапецій, що підтверджує теорему Далквіста про те, що цей метод є найточнішим методом другого порядку;
- НЕ не має переваг в оцінці локальної похибки перед АМ2 та ІІІ.

1. *Арашунян О. Б.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране / О. Б. Арашунян, С. Ф. Залёткин. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 336 с.
2. *Брайтон Р.* Новый эффективный алгоритм решения алгебраических систем дифференциальных уравнений, основанный на использовании формул численного дифференцирования в неявном виде с разностями назад / Р. Брайтон, Ф. Густавсон, Г. Хэчтел // ТИИЭР. – 1972. – Т. 60, № 1. – С. 136–148.
3. *Заворин А. Н.* Тестирование программ решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Заворин. – Рига : Латв. гос. ун-т, 1983. – 48 с.
4. Кость Я. Розробка програмного забезпечення для моделювання динамічних систем із жорсткими математичними моделями / Я. І. Кость, І. О. Хвищун // Електроніка та інформ. технології. – 2012. – Вип. 2. – С. 184–196.
5. *Новиков Е. А.* Явные методы для жестких систем / Е. А. Новиков, [под ред. А. Н. Горбань]. – Новосибирск : Наука. Сиб. предприятие РАН, 1997. – 195 с.
6. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 279 с.
7. *Чуа Л. О.* Машинный анализ электронных схем : Алгоритмы и вычислительные методы / Л. О. Чуа, Пен-Мин Лин. – М. : Энергия, 1980. – 640 с.
8. *Shampine L. F.* Error Estimation and Control for ODEs / L. F. Shampine // Mathematics Department, Southern Methodist University, Dallas. – 2004. – February 3. – 14 p.
9. *Shichman H.* Integration System of a Nonlinear Network-Analysis Program / H. Shichman // IEEE Trans. Circuit theory. – 1970 August. – CT-17. – P. 378–386.

Стаття: надійшла до редакції 16.04.2014,

доопрацьована 30.05.2014,

прийнята до друку 30.05.2014.

## COMPARISON OF METHODS OF LOCAL TRUNCATION ERROR ESTIMATION FOR DIFFERENT INTEGRATORS

Ya. Kost, J. Khvyshchun, Ya. Shmygelsky

*Ivan Franko National University of Lviv,  
107 Tarnavsky St., UA-79017, Lviv, Ukraine  
kostjerry@gmail.com*

The algorithms of evaluation of local truncation errors for the most widespread methods of integration are given. The method of such evaluation is offered for the trapezoidal integrator. The set of the test problems with known analytical solution is given. These problems solved with different integrators. Conclusions about the effectiveness are made.

*Key words:* mathematical modelling, local truncation error, integration methods.



**ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНКИ  
ЛОКАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ УСЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПРОЦЕССЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Я. Кость, И. Хвищун, Я. Шмигельский

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко  
ул. ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина  
kostjerry@gmail.com*

Приведено алгоритмы оценивания локальных погрешностей усечения для самых распространенных методов интегрирования уравнений математических моделей. Предложено способ практической реализации такого оценивания для неявного метода трапеций. Приведено серию тестовых задач с разными коэффициентами жесткости, для которых аналитические решения известны. Эти задачи решены разными методами интегрирования уравнений математических моделей. Сравнено точность названных алгоритмов оценивания локальных погрешностей и сделано выводы об их эффективности.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, локальная погрешность усечения, методы интегрирования.