

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА ЯВИЩ

УДК 531.8

ВПЛИВ ЗАТРИМКИ В УПРАВЛІННІ НА ПРОЦЕС ПОЛЬОТУ КВАДРОКОПТЕРА

Б. Благітко, Ю. Мочульський

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
blagitko@electronics.lnu.edu.ua, mochulsky@ukr.net*

Наведено результати досліджень математичної моделі квадрокоптера з пропорційно-диференціальним керуванням в аспекті стабілізації польоту та оптимального виведення квадрокоптера на заданий режим з урахуванням властивостей електродвигунів. Математична модель квадрокоптера представлена системою диференціальних рівнянь у формі Коші 16-го порядку. Вхідною інформацією є значення висоти польоту квадрокоптера, значення кутів тангажу, крену, ролу та зміни їх у часі. Пропорційно-диференціальний регулятор реалізований на мікроконтролері й змінює силу тяги гвинтів, задаючи напруги чотирьох електродвигунів. Розглянуто тестовий приклад автоматичного виконання фігури простого пілотажу – горизонтальної вісімки (з правим та лівим поворотами). Досліджено вплив часової затримки у мікроконтролері між подачею положення квадрокоптера і видачею обчисленої напруги на траєкторію польоту.

Ключові слова: квадрокоптер, керування, ПД-регулятор, час затримки.

Чимало процесів, які засновані на передаванні маси, енергії, інформації тощо, супроводжуються наявністю запізнювання. Це запізнювання може бути зумовлене різними причинами – обмеженістю швидкості поширення взаємодії (наприклад, електричного сигналу), “не миттєвістю” нервової та м’язової реакції в системах людина–машина, наявністю інерційності деяких елементів, обмеженістю швидкості перебігу технологічних процесів (наприклад, горіння в камері двигуна).

У багатьох випадках вилучення запізнювання з розгляду, однак, дає змогу адекватно описувати реальні процеси. Проте іноді неврахування запізнювання призводить до абсурдних (або, у крайньому випадку, не еквівалентних реальності) висновків.

Систему звичайних диференціальних рівнянь можна записати так:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}, t) \quad (1)$$

Перехід до системи звичайних диференціальних рівнянь із затримкою означає, що замість рівняння (1) треба розглядати [1, 2] рівняння

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}, (t - \tau)) \quad \tau > 0, \quad (2)$$

де $f(\bar{X}, t)$ – задана вектор-функція; τ – затримка; $\bar{X}(t)$ – вектор розв'язку рівняння.

Зазначимо, що для системи (1) похідна в кожний момент визначена станом системи в той же момент, а для системи (2) – її станом в один з попередніх моментів. Тоді стає зрозумілою вимога невід'ємності запізнювання τ , тобто затримки, адже швидкість процесу не може бути визначена станом системи в наступні моменти часу.

У разі використання регулятора вектор вхідних сигналів \bar{U} обчислюють мікроконтролером на підставі змінних стану, отриманих у момент часу t_i . Результати обчислень отримують із запізненням τ , тобто в момент часу $t_i + \tau$. Звідси випливає, що у випадку використання регулятора із запізненням рух системи на відріжку часу від t_i до $t_{i+1} = t_i + \tau$ описує рівняння

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}) + b_m \cdot \bar{U}[\bar{X}(t_i)]. \quad (3)$$

На рис. 1 зображено блок-схему взаємодії системи і регулятора.

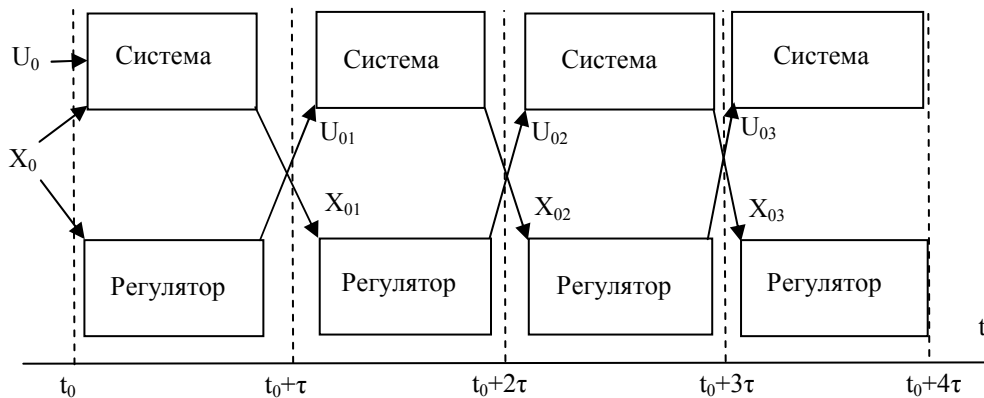


Рис. 1. Блок-схема взаємодії системи і регулятора.

У момент часу t_0 динамічна система перебуває в стані, визначеному вектором змінних стану \bar{X}_0 , і на неї подають вхідні сигнали \bar{U}_0 . Ці ж початкові умови (або частина з них) подають на регулятор. Упродовж певного часу τ регулятор обчислює значення вхідних сигналів \bar{U}_{01} , які необхідно подати для виходу системи в заданий режим зі стану \bar{X}_0 . Динамічна система впродовж цього часу рухається з огляду на початкові умови \bar{X}_0 та вхідні сигнали \bar{U}_0 . У момент часу $t_1 = t_0 + \tau$ регулятор передає системі обчислене значення вхідних сигналів \bar{U}_{01} . Тоді ж змінні вектора стану \bar{X}_{01} в момент часу $t_1 = t_0 + \tau$ надходять на вхід регулятора. Регулятор до моменту часу $t_2 = t_1 + \tau$ обчислює значення вхідних сигналів \bar{U}_{02} на основі вектора \bar{X}_{01} . Одночасно на

відрізку від t_1 до $t_2 = t_1 + \tau$ система рухається, виходячи з початкових умов $\bar{X}(t_1) = \bar{X}_{01}$.

Надалі цей процес періодично повторюється з періодом τ .

Квадрокоптер конструктивно є поєднанням двох підсистем.

Електромеханічна підсистема реалізована у вигляді хрестоподібної балкової конструкції, у якій на кожному з кінців однакової довжини балок прикріплені електричні двигуни постійного струму з повітряними пропелерами із незмінюваним кутом атаки так, що сили тяги всіх чотирьох пар електричних двигун–пропелер напрямлені перпендикулярно до площини балкової конструкції, причому двигуни на сусідніх кінцях балок мають різні пропелери: один з них – правий пропелер, інший – лівий. Цю підсистему характеризують масою, моментом інерції та габаритними розмірами. Швидкості обертання роторів електродвигунів і, відповідно, сили тяги пропелерів змінюють, змінюючи напруги, які подають на обмотки електродвигунів.

Електронна підсистема реалізована як плата управління силою тяги електродвигунів визначенням напруг, які необхідно подати на обмотки відповідних електродвигунів для переміщення квадрокоптера за заданою траєкторією. Обчислення необхідних значень напруг виконує мікроконтролер за законом пропорційно-диференціального (ПД) регулятора, порівнюючи біжучі вимірні значення із заданими. Саме процес обчислення у мікроконтролері значення сигналів управління зумовлює затримку в керуванні.

Для дослідження моделі квадрокоптера як динамічної системи із затримкою вибрано фігуру простого пілотажу – горизонтальну вісімку. У разі виконання цієї фігури квадрокоптер повинен у горизонтальній площині виконати повне коло, а після цього виконати друге коло в протилежному напрямі для того, щоб повернутися в початкову точку. Для руху по колу на заданій висоті до квадрокоптера повинна бути прикладена напрямлена догори вертикальна сила, яка дорівнює mg , та горизонтальна доцентрова сила, значення якої визначатиме радіус кола. Для створення доцентрової сили необхідно нахилити квадрокоптер, тобто задати ненульовий кут тангажу або крену чи обидва кути одночасно. Тоді силу тяги пропелерів можна розкласти на дві складові – горизонтальну та вертикальну. Під час руху по колу вектор доцентрової сили рівномірно змінює свій напрям. Таку доцентрову силу можна створити, задавши певний сталий кут тангажу або крену та рівномірно в часі змінювати кут ристання. Після того, як квадрокоптер, описавши коло, повернеться в початкову точку, необхідно виміняти напрям зміни кута ристання на протилежний і описати ще одне коло.

Параметри квадрокоптера, який моделювали, такі:

$$\begin{array}{lll} g = 9,81 \text{ м/с}^2 & k = 2,98 \cdot 10^{-6} & J_{xx} = J_{yy} = 4,856 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ m = 0,468 \text{ кг} & b = 1,14 \cdot 10^{-7} & J_{zz} = 9,801 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ L = 0,225 \text{ м} & J_{\Gamma} = 3,357 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 & A_x = A_y = A_z = 0,25 \text{ кг/с} \end{array}$$

Під час обчислень використовували такі параметри електродвигунів:

$$k_d = 0,0216 \frac{\text{кг} \cdot \text{Ч} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{Ч} \cdot \text{А}}, \quad J = 2,83 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{Ч} \cdot \text{м}^2, \quad M_T = 0,00537 \text{ Н} \cdot \text{Ч} \cdot \text{м},$$

$$R = 2,72 \text{ Ом}, \quad k = 3,4526 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н} \cdot \text{Ч} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{рад}^2}$$

Як доведено в [3], для квадрокоптера вектор змінних стану має вигляд

$$\bar{X} = [X \ Y \ Z \ V_x \ V_y \ V_z \ \gamma \ \theta \ \psi \ \omega_\gamma \ \omega_\theta \ \omega_\psi \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4]^T,$$

вектор-функція

$$f(\bar{X}) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ F \cdot (\cos(\psi) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\psi) \cdot \sin(\theta)) / m - Ax \cdot V_x / m \\ F \cdot (-\sin(\psi) \cdot \sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\psi) \cdot \sin(\theta)) / m - Ay \cdot V_y / m \\ -g + F \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) / m - Az \cdot V_z / m \\ \omega_\gamma \\ \omega_\theta \\ \omega_\psi \\ ((J_y - J_z) \cdot \omega_\theta \cdot \omega_\psi - J_x \cdot \omega_\theta \cdot \omega_\gamma + M_\gamma) / J_x \\ ((J_z - J_x) \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\psi + J_y \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\theta + M_\theta) / J_y \\ ((J_x - J_y) \cdot \omega_\gamma \cdot \omega_\theta + M_\psi) / J_z \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_1 - a_2 \cdot \omega_1^2 \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_2 - a_2 \cdot \omega_2^2 \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_3 - a_2 \cdot \omega_3^2 \\ -a_0 - a_1 \cdot \omega_4 - a_2 \cdot \omega_4^2 \end{bmatrix},$$

а вектор вхідних сигналів $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$.

У векторі змінних стану X, Y, Z – просторові координати; V_x, V_y, V_z – проекції швидкості квадрокоптера на осі координат; γ, θ, ψ – кути крену, тангажу та ристання; $\omega_\gamma, \omega_\theta, \omega_\psi$ – кутові швидкості; $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – кутові швидкості роторів двигунів; $F = k \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$ – сумарна сила тяги всіх пропелерів; A_x, A_y, A_z – коефіцієнти, які враховують опір повітря; m – маса квадрокоптера; g – прискорення сили тяжіння; J_x, J_y, J_z – моменти інерції квадрокоптера відносно осей x, y, z , відповідно; $M_\gamma = k \cdot L \cdot (\omega_4^2 - \omega_2^2)$, $M_\theta = k \cdot L \cdot (\omega_1^2 - \omega_3^2)$, $M_\psi = b \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$ – моменти сил крену, тангажу та ристання, відповідно. Кожен із чотирьох двигунів описують рівнянням $\frac{d\omega_n}{dt} + a_1 \cdot \omega_n + a_2 \cdot \omega_n^2 + a_0 = b_m \cdot U_n$, $n = 1 \div 4$.

Положення квадрокоптера задають шістьма величинами: просторовими координатами X, Y, Z та кутами θ, γ, ψ . Однак змінювати їх ми можемо лише за допомогою чотирьох величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та ω_4 . Тому виберемо для регулятора чотири змінні: Z, θ, γ та ψ , а саме: висоту польоту квадрокоптера, значення кутів тангажу, крену, ристання.

Для регулювання польоту квадрокоптера використаємо пропорційно-диференціальний регулятор, описуваний такими рівняннями:

$$\begin{aligned} e(t) &= x_d(t) - x(t) \\ u(t) &= K_p \cdot e(t) + K_d \cdot \dot{e}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

У формулі (4) $e(t)$ – різниця між заданим значенням параметра x_3 та біжучим x , u – регулювальна сила; K_p та K_d – коефіцієнти пропорційного та диференціального регулятора, відповідно.

Для аналізу використовували функцію інтегрування звичайних диференціальних рівнянь ode23tb (на першому етапі рівняння інтегрують методом трапецій, а на другому етапі застосовують формулу диференціювання назад другого порядку). Після аналізу впливу параметрів регулятора на швидкість перехідного процесу для регулятора вибрали $K_{zd} = 4$; $K_{zp} = 12$; $K_{\gamma d} = K_{\psi d} = K_{\theta d} = 10$; $K_{\gamma p} = K_{\psi p} = K_{\theta p} = 35$.

У разі моделювання руху квадрокоптера по горизонтальній вісімці розглянутому вище регулятору задавали сталу висоту $Zd = 5$ м, кут крену постійно дорівнював нулю, а кут тангажу задавали таким, що дорівнює $0,05$ радіана. Функція регулювання задає закон зміни кута рискання спочатку $\phi_d = 0.19 \cdot t$ до 33 с, а після цього – $\phi_d = 2\pi - 0.19 \cdot (t - 33)$. На рис. 2 зображено графік зміни кута рискання. За таких даних квадрокоптер виконує політ у вигляді фігури простого пілотажу – горизонтальної вісімки з радіусом близько 5 м. Якщо задати кут тангажу $0,1$ радіана, то радіус вісімки збільшиться вдвічі.

Для дослідження впливу затримки на процес польоту квадрокоптера за маршрутом горизонтальної вісімки значення затримки змінювали від $\tau = 0$ с до $\tau = 0,32$ с. Результати досліджень показані нижче на графіках.

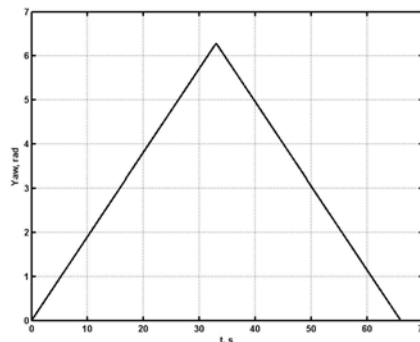
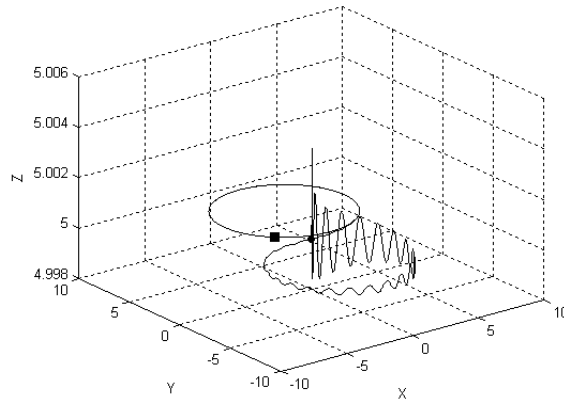
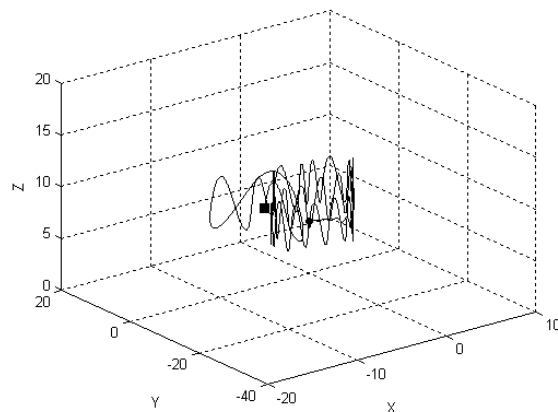


Рис. 2. Графік зміни кута рискання.

На рис. 3 показано результат польоту квадрокоптера для значень затримки $0 < \tau < 0,2$ с, оскільки всі графіки в цьому діапазоні майже не відрізняються. Тобто політ із затримкою до $\tau = 0,2$ с є нормальним.

На рис. 4 відображено результат польоту квадрокоптера для значень затримки $\tau = 0,32$ с. Як бачимо з графіка, затримка більше $0,3$ с призводить до ненормального польоту, тобто так чи інакше квадрокоптер падає на землю.

Рис. 3. Політ квадрокоптера при $\tau < 0,2$ с.Рис. 4. Політ квадрокоптера при $\tau = 0,32$ с.

Зазначимо, що між нормальним польотом і катастрофічним, тобто між стійким та нестійким польотом квадрокоптера, немає строго точно визначеної затримки. Тут існує деяка перехідна область τ , коли політ по маршруту відбувається, проте деякі параметри польоту не відповідають заданим. Наприклад, висота польоту набуває коливного характеру зі щораз більшою амплітудою коливань зі збільшенням затримки.

Отже, динамічна система із затримкою, як модель польоту квадрокоптера, може залежно від затримки перебувати в трьох суттєво різних областях, а саме:

при $\tau < 0,2$ с простежується повна відповідність параметрів польоту квадрокоптера заданим;

при $0,2 \text{ с} \leq \tau \leq 0,3 \text{ с}$ фіксують часткову втрату керованості, унаслідок чого загальний маршрут горизонтальної вісімки квадрокоптер пролітає, однак деякі параметри

не відповідають заданим, наприклад, висота польоту змінюється періодично з доволі значною амплітудою;

при $\tau > 0,3$ с спостерігають повну втрату керованості польотом, унаслідок чого квадрокоптер падає на землю.

Розглянуті вище процеси відбуваються за умови, що динамічна система без затримки забезпечує стійкий розв'язок і, відповідно, нормальний політ квадрокоптера [3].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беллман Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. – М. : Мир, 1967.
2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1972.
3. *Благітко Б.* Математичне моделювання процесу стабілізації квадрокоптера у польоті / Б. Благітко, Ю. Мочульський // Електроніка та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 3. – С. 96–107.

*Стаття: надійшла до редакції 14.10.2013,
доопрацьована 20.11.2013,
прийнята до друку 27.11.2013.*

INFLUENCE OF DELAY IN CONTROL ONTO QUADROCOPTER'S FLIGHT

B. Blahitko, Yu. Mochulsky

*Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine
blagitko@electronics.lnu.edu.ua , mochulsky@ukr.net*

The investigation of mathematical model of quadcopter with proportionally-differential control in the aspect of flight stabilization and optimal leading of quadcopter to a specified operating mode taking into account the electro engines properties is presented. Mathematical model of a quadcopter is defined as a 16th order system of differential equations in a Cauchee form. The input information consists of flight height, pitch, roll and yaw angles and their time variations. PD-controller is implemented with a microcontroller and changes the propellers motive force by setting the voltage of the four electro engines. We consider A test problem of automatic performing of a simple pilotage figure – a horizontal figure-of-eight (with both left and right turns) is considered. The influence on a flight of time delay in the microcontroller between the input of a quadcopter's status and the output of calculated voltage trajectory was investigated.

Key words: quadcopter, control, PD-controller, time delay.

**ВЛИЯНИЕ ЗАДЕРЖКИ В УПРАВЛЕНИИ
НА ПРОЦЕСС ПОЛЁТА КВАДРОКОПТЕРА****Б. Благитко, Ю. Мочульский**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко
Ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов Украина
blagitko@electronics.lnu.edu.ua , mochulsky@ukr.net*

Приведено результаты исследований математической модели квадрокоптера с пропорционально-дифференциальным управлением в аспекте стабилизации полёта и оптимального вывода квадрокоптера на заданный режим с учётом особенностей электродвигателей. Математическая модель квадрокоптера представлена системой дифференциальных уравнений в форме Коши 16-го порядка. Входной информацией служит высота полёта квадрокоптера, значения углов тангажа, крена, рыскания и изменение их во времени. ПД-регулятор реализован на микроконтроллере и меняет силу тяги винтов, задавая напряжения на четырёх электродвигателях. Рассмотрено тестовый пример автоматического исполнения фигуры простого пилотажа – горизонтальной восьмёрки (как с правым, так и с левым поворотами). Исследовано влияние временной задержки в микроконтроллере между подачей положения квадрокоптера и выдачей вычисленного напряжения на траекторию полёта.

Ключевые слова: квадрокоптер, управление, ПД-регулятор, время задержки.