

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА ЯВИЩ

УДК 531.8

### СПОСОБИ РУЧНОГО КЕРУВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИМ ЗЛЕТОМ І ПРИЗЕМЛЕННЯМ КВАДРОКОПТЕРА

Б. Благітко, Ю. Мочульський

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна  
blagitko@electronics.wups.lviv.ua*

Наведено результати досліджень особливостей трьох основних способів ручного керування вертикальними злетом і приземленням квадрокоптера з урахуванням динамічних властивостей електродвигунів. Розглянуто спосіб двопозиційного керування, спосіб трипозиційного керування та удосконалений спосіб двопозиційного керування для оптимального виведення квадрокоптера на заданий режим. У цьому разі оператор керує квадрокоптером, перебуваючи на поверхні Землі. Оператор може змінювати приріст сили тяги, знак приростів та моменти часу, у які повинні відбуватися всі ці зміни. Вхідною інформацією є значення висоти польоту квадрокоптера та зміни її в часі.

*Ключові слова:* квадрокоптер, злет, приземлення, позиційне керування.

Проаналізовано можливі способи ручного керування процесом вертикального злету та приземлення квадрокоптера, пов'язані з розробкою літальних апаратів, керованих людиною з поверхні Землі. Такі автономні літальні апарати замінюють керовані людиною на борту апарати в різних галузях техніки, наприклад, у задачах екологічного моніторингу, моніторингу та автоматизованого керування транспортними потоками тощо.

У праці [1] розглянуто математичні основи стабілізації висоти польоту квадрокоптера. Ми за допомогою моделювання [3] врахуємо динамічні властивості електродвигунів та введемо залежності сигналів оптимального керування для забезпечення плавного виведення квадрокоптера на задану висоту. При цьому оператор керує квадрокоптером, перебуваючи на поверхні Землі. Оператор може змінювати величину приросту сили тяги, знак приростів та моменти часу, в які повинні відбуватися всі ці зміни. Вхідною інформацією є значення висоти польоту квадрокоптера та зміни її в часі.

Фізична модель квадрокоптера реалізована у вигляді хрестоподібної (прямий хрест) балкової конструкції, у центрі якої розташовані акумулятор і мікропроцесорна система керування чотирма двигунами з повітряними гвинтами для забезпечення польоту квадрокоптера. Як двигуни використано електричні безколекторні двигуни, керовані струмом. Електричні двигуни підвішені вертикально на кінцях конструкції так, що до

вала кожного з них прикріплений повітряний гвинт із незмінюваним кутом атаки. Сила тяги кожної пари, електродвигун – повітряний гвинт, керована мікропроцесорною системою завдяки подачі струму для підтримування певної швидкості обертання вала електродвигуна. Довжина кожної півдіагоналі хрестоподібної балкової конструкції становить 200 мм. Діаметр кожного з повітряних гвинтів – 80 мм. Переріз тонкостінної порожнистої балки –  $10 \times 10$  мм.

Математичну модель квадрокоптера реалізують у вигляді спрощеної стрижневої системи заміщення з невагомими жорсткими стрижнями, схема якої зображена на рис. 1.

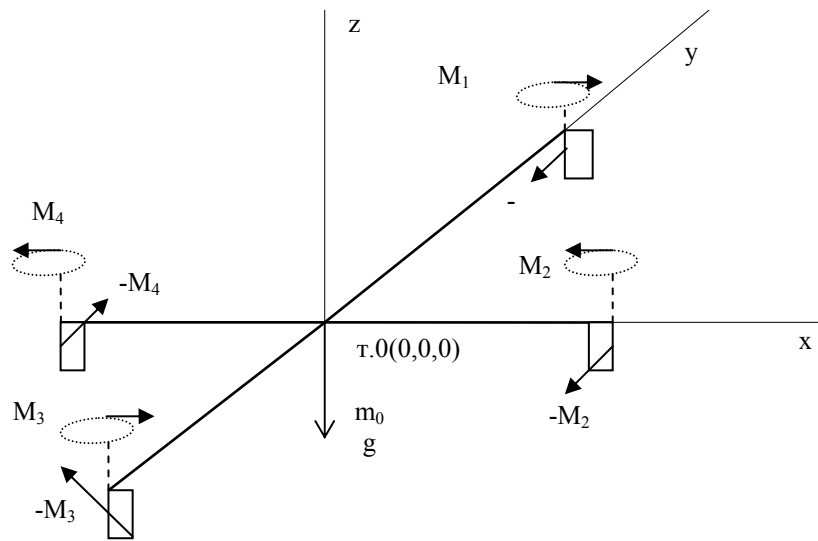


Рис. 1. Стрижнева система заміщення фізичної моделі квадрокоптера.

Лінійні розміри спрощеної стрижневої системи заміщення збігаються з розмірами фізичної моделі квадрокоптера. Маса  $m$  тіла, яке розміщене в центрі конструкції, складається з маси акумулятора, маси балкової конструкції та маси плати мікропроцесорної системи керування разом. Маси  $m_1, m_2, m_3, m_4$  тіл, які містяться на кінцях стрижнів конструкції, позначають маси кожної з пар, електродвигун–гвинт, кутові швидкості  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  – швидкості обертання валів кожного з електродвигунів, сили  $F_1, F_2, F_3, F_4$  – силу тяги кожної пари електродвигун–гвинт. Напрямок обертання гвинтів за годинниковою стрілкою вважають додатним, напрям обертання гвинтів проти годинникової стрілки – від’ємним. Те саме стосується напрямку обертання всієї конструкції, якщо вона обертається в процесі керування. Кутова швидкість  $\omega_0$  позначає швидкість обертання квадрокоптера навколо своєї умовної осі, яка проходить через центр конструкції вертикально до поверхні Землі. Центр координат  $t.O(0,0,0)$  системи координат  $x, y, z$  збігається з точкою перехрестя, вісь  $z$  напрямлена вертикально вгору, а осі  $x, y$  – по діагоналях конструкції.

Конструкція не повинна обертатися ні в той, ні в інший бік відносно осі  $z$  за будь-яких сигналів системи керування, тобто в усталеному режимі повинна виконуватися рівність  $\omega_0 = 0$ . Вибираємо напрями обертання валів електродвигунів:  $\omega_1 = \omega_3 > 0, \omega_2 =$

$= \omega_4 < 0$ . Під час обертання вал кожного з електродвигунів створює обертовий момент  $M_1 = M_3$  і  $M_2 = M_4$ . Згідно з третім законом Ньютона, на статорі кожного з електродвигунів виникає протидійний момент  $-M_1 = -M_3$  та  $-M_2 = -M_4$ . Перерахувавши всі обертові моменти за правилом важеля, отримаємо сумарний обертовий момент  $M_0 = 0$ . Тоді  $\omega_0 = 0$  і конструкція не обертається навколо осі  $z$ . У разі найменшої зміни будь-якої  $\omega_i = \omega_i + \Delta\omega$  конструкція починає обертатися в той, чи інший бік відносно осі  $z$ , що є неприйнятним. Це означає, що мікропроцесорна система повинна забезпечувати синхронне керування швидкостями усіх чотирьох електродвигунів одночасно за будь-яких змін висоти польоту квадрокоптера.

Для спрощення задачі приймаємо квадрокоптер за матеріальну точку масою  $m_0 = m + m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ , на яку діє сумарна підймальна сила чотирьох електродвигунів  $F_0 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$  та сумарна сила тяжіння  $P_0 = m_0 \cdot g$ , як це показано на рис. 2.

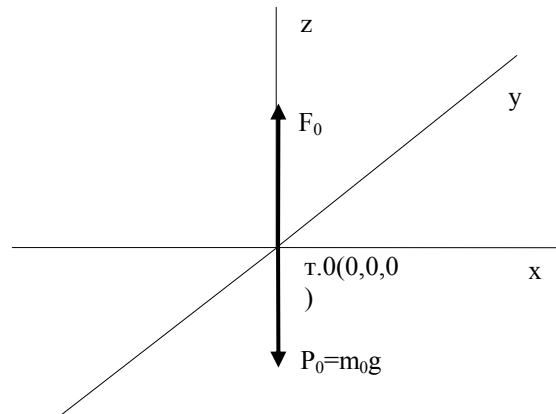


Рис. 2. Спрощена схема системи заміщення фізичної моделі квадрокоптера.

Не враховуючи сили опору повітря, згідно з другим законом Ньютона, запишемо рівняння руху квадрокоптера в повітрі (1):

$$m_0 \cdot a = F - m_0 \cdot g \quad (1)$$

або

$$a = \frac{F}{m_0} - g, \quad (2)$$

де  $a$  – прискорення квадрокоптера.

Диференціальне рівняння руху квадрокоптера по вертикалі має вигляд (3)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{F}{m_0} - g, \quad (3)$$

або

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F}{m_0} - g, \quad (4)$$

де  $V$  – вертикальна швидкість квадрокоптера.

Розв'яжемо ці рівняння за сталої сили  $F$ , отримаємо

$$V = V_0 + at; \quad (5)$$

$$h = \frac{at^2}{2} + V_0t + h_n, \quad (6)$$

де  $V_0$  – початкова швидкість,  $h_n$  – початкова висота.

Найпростішим способом керування рухом квадрокоптера є двопозиційне керування, за якого на квадрокоптер діє або стала сила  $F_1 > m_0g$ , або стала сила  $F_2 < m_0g$ . Якщо висота квадрокоптера менша від заданої висоти  $h_0$ , то діє сила  $F_1$ , яка піднімає його, а за висоти понад  $h_0$  діє сила  $F_2$ , яка опускає його.

Розглянемо вертикальний злет квадрокоптера. Тоді  $V_0$  та  $h_n$  дорівнюють нулю. У разі злету діє сила  $F_1$ , яка створює прискорення  $a_1 = \frac{F_1}{m_0} - g$ . Під дією цієї сили квадро-

коптер досягне висоти  $h_0$  за час  $t_p = \sqrt{\frac{2h_0}{a_1}}$  та набере швидкості  $V_0 = a_1 \cdot t_p$ . Після цього

повинна діяти сила  $F_2$ , яка створює від'ємне прискорення  $a_2 = \frac{F_2}{m_0} - g$ . За законом

збереження енергії на рівні  $h_0$  кінетична енергія дорівнює  $\frac{m_0 V_0^2}{2}$ , а потенціальна – нулю (від рівня  $h_0$ ). У максимальній точці  $h_0 + \Delta h$  кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна –  $-m_0 a_2 \Delta h$ . Звідси

$$\Delta h = -\frac{V_0^2}{2a_2}. \quad (7)$$

Коли квадрокоптер повернеться на висоту  $h_0$ , на нього повинна почати діяти сила  $F_1$ , яка створює додатне прискорення  $a_1 = \frac{F_1}{m_0} - g$ . Швидкість у цей момент дорівнює  $-V_0$ . Якщо ми хочемо, щоб максимальне відхилення вниз від рівня  $h_0$  теж дорівнювало  $\Delta h$ , то необхідно, щоб  $a_1 \cdot (-\Delta h) = \frac{(-V_0)^2}{2}$ . Звідси випливає  $a_1 = -a_2$ , або  $F_2 = 2m_0g - F_1$ . Підставивши у вираз (7) значення  $V_0$ , отримаємо

$$\Delta h = -\frac{(a_1 t_p)^2}{2a_2}, \quad (8)$$

або, використавши формулу для  $t_p$ ,

$$\Delta h = -\frac{a_1}{a_2} h_0. \quad (9)$$

Отже, якщо використовувати двопозиційне керування квадрокоптером ( $a_2 = -a_1$ ), то висота польоту квадрокоптера коливатиметься відносно рівня  $h_0$  з амплітудою  $h_0$ .

На рис. 3 показано зміну сили, швидкості та координати квадрокоптера в часі у разі двопозиційного керування, старту через 2 с, після цього при  $h < h_0$  діє сила  $F_1 = 1.05m_0g$ , при  $h > h_0$  – сила  $F_2 = 2m_0g - F_1$ . Тут і надалі всі часові залежності отримані з застосуванням методу припасовування [2] в ході розв’язування диференціальних рівнянь руху квадрокоптера.

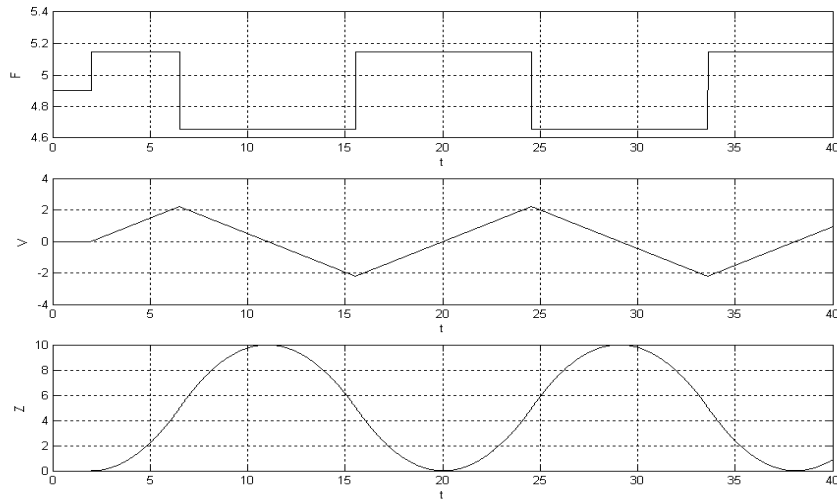


Рис. 3. Залежність сили, швидкості та координати від часу в разі двопозиційного керування вертикальним злетом квадрокоптера.

На підставі аналізу залежності висоти квадрокоптера від часу (див. рис. 3) в разі двопозиційного керування можна зробити такий висновок: характер зміни висоти є хвилеподібним – спочатку підймання від 0 до  $h_0$ , а потім зниження від  $h_0$  до 0, тобто до поверхні Землі.

Очевидно, що такий принцип двопозиційного керування нас не задовольняє. Для того, щоб зменшити амплітуду коливань, необхідно вивести квадрокоптер на висоту  $h_0$  зі значно меншою кінцевою швидкістю. Враховуючи, що ця швидкість визначена формулою  $V_0 = \sqrt{2a_1h_0}$ , зменшити її можна, піднімаючи квадрокоптер із прискоренням  $a_n$ , значно меншим, ніж  $a_1$ , тобто ввести трипозиційне керування (злет з прискоренням  $a_n$ , а потім опускання з прискоренням  $a_2$  та піднімання з прискоренням  $a_1$ ). Для того, щоб коливання відносно рівня  $h_0$  дорівнювали  $\Delta h$ , необхідно вибрати  $a_n = a_1 \frac{\Delta h}{h_0}$ . Звідси

випливає, що сила для злету

$$F_n = m_0 g + (F_1 - m_0 g) \frac{\Delta h}{h_0} \quad (10)$$

за тривалості злету

$$t_n = \sqrt{\frac{2h_0}{a_n}}. \quad (11)$$

На рис. 4 показано зміну сили, швидкості та координати квадрокоптера в часі в разі трипозиційного керування.

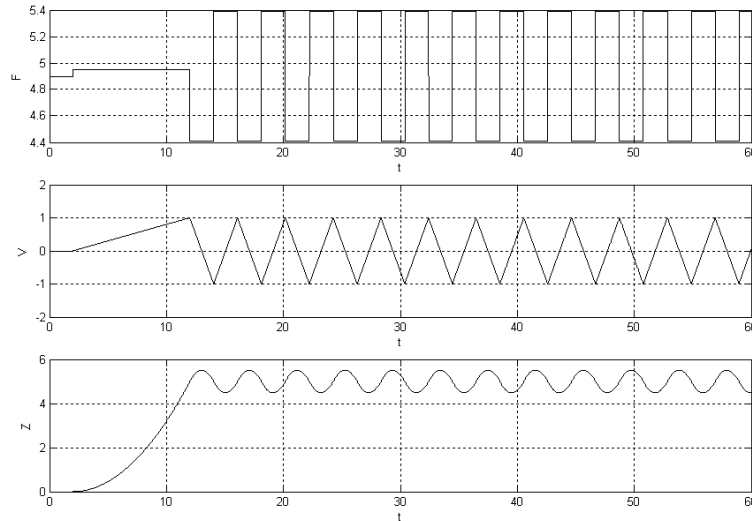


Рис. 4. Залежність сили, швидкості та координати від часу в разі трипозиційного керування вертикальним злетом та приземленням квадрокоптера.

З аналізу залежності висоти квадрокоптера від часу (рис. 4) в разі трипозиційного керування можна зробити такі висновки:

- характер зміни висоти є коливний, проте амплітуда коливань суттєво зменшилася порівняно з попереднім результатом двопозиційного керування;
- коливання відбуваються в околі бажаної висоти  $h_0$  з періодом  $t_n$ ;
- процес злету є цілком задовільним.

Процес приземлення залежить від навичок і вміння оператора. У випадку вдалого вибору значення  $\Delta F$  або моменту зміни в часі можуть виникати такі випадки:

- квадрокоптер впаде на поверхню Землі з деякої висоти, меншої від  $h_0$ ;
- квадрокоптер вріжеться в землю з ненульовою швидкістю;
- квадрокоптер плавно сяде на землю з нульовою швидкістю.

Іншим способом зменшення швидкості в разі виходу на висоту  $h_0$  є двопозиційне керування: злет під дією піднімальної сили  $F_1$ , однак у разі досягнення висоти  $h_0/2$  перемикаємо силу  $F_1$  на знижувальну силу  $F_2$ . Тоді квадрокоптер підніметься на висоту  $h_0$  з нульовою швидкістю і почне знижуватися. Якщо в деякий момент  $t_1$  після зниження

давати силу  $F_1$  за висоти менше  $h_0$ , а за висоти понад  $h_0$  – силу  $F_2$ , то квадрокоптер коливатиметься довкола висоти  $h_0$ . Амплітуда коливань залежатиме від часу  $t_1$ . Для плавного приземлення за висоти понад  $h_0/2$  даємо силу  $F_2$ , а за висоти, меншої від  $h_0/2$ , –  $F_1$ . У цьому й полягає удосконалений спосіб двопозиційного керування вертикальним злетом і приземленням квадрокоптера.

На рис. 5 показано зміну сили, швидкості та координати квадрокоптера в часі у разі удосконаленого способу двопозиційного керування з  $t_n = 13,5$  с. Як бачимо, після досягнення висоти  $h_0 = 5$  м квадрокоптер починає спускатися і сила підняття  $F_1$  увімкнеться на висоті 4,5 м. Після цього відбуваються коливання в околі висоти 5 м з амплітудою 0,5 м.

Якщо перемикання сил увімкнути швидше ( $t_1 = 12,5$  с), то квадрокоптер спуститься лише до висоти 4,95 м, і перемикання сил почнеться за меншої швидкості. Це приведе до зменшення амплітуди коливань, відповідно, до 0,05 м, як бачимо з рис. 6.

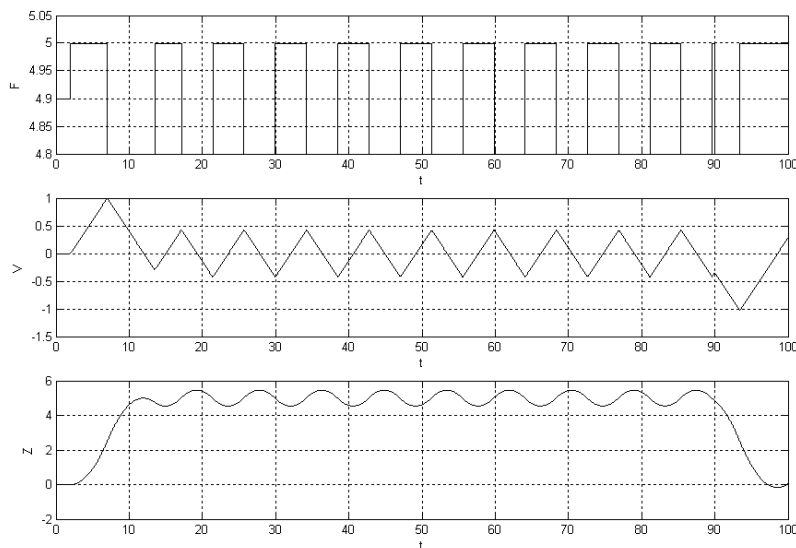


Рис. 5. Залежність сили, швидкості та координати від часу в разі удосконаленого способу двопозиційного керування вертикальним злетом та приземленням квадрокоптера з  $t_n = 13,5$  с.

На підставі аналізу залежності висоти квадрокоптера від часу (див. рис. 5, 6) в разі удосконаленого способу двопозиційного керування можна зробити такий висновок: характер зміни висоти є коливний, проте оператор має змогу мінімізувати амплітуду коливань висоти підбором періоду коливань.

Зазначимо, що в разі отримання результатів, які наведені вище, передбачали, що оператор миттєво може змінювати підймальну силу квадрокоптера. Насправді оператор лише змінює керівну напругу на електродвигунах квадрокоптера, наприклад, за допомогою джойстика.

На жаль, двигун не може моментально змінювати силу тяги з  $F_1$  на  $F_2$  (або з  $F_2$  на  $F_1$ ), як це потрібно в разі двопозиційного керування. Розглянемо найпростіший випадок: двигун – інерційна ланка зі сталою часу  $\tau$ . У разі прикладання до двигуна постійної

напруги сила тяги змінюватиметься від початкового значення  $F_0$  до значення  $F_k$ , яке відповідає прикладеній постійній нарузі в усталеному режимі, за законом

$$F = (F_0 - F_k) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + F_k. \quad (12)$$

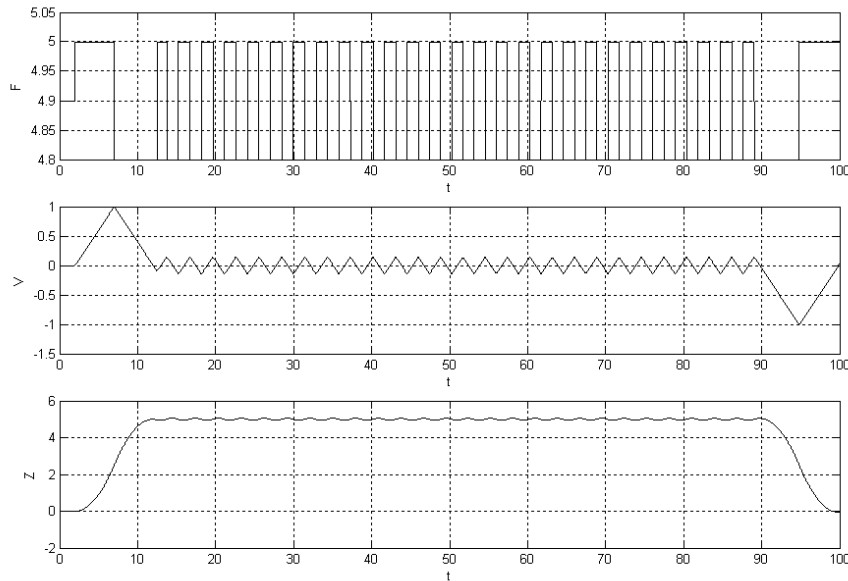


Рис. 6. Залежність сили, швидкості та координати від часу в разі удосконаленого способу двопозиційного керування вертикальним злетом та приземленням квадрокоптера з  $t_{\text{п}} = 12,5$  с.

Якщо квадрокоптер піднявся до висоти  $h_0$  під дією сили  $F_1$  і має на цій висоті швидкість  $V_0$ , то в разі перемикавання напруги на двигуні на  $U_2$ , яка відповідає силі тяги  $F_2$ , сила тяги змінюватиметься за законом

$$F = (F_1 - F_2) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + F_2. \quad (13)$$

У цьому випадку швидкість піднімання змінюватиметься за формулою

$$V = \frac{F_2 - F_1}{m_0} \tau (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) + \left(\frac{F_2}{m_0} - g\right)t + V_0, \quad (14)$$

а висота – за формулою

$$h = \frac{F_1 - F_2}{m_0} \tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{F_2}{m_0} - g\right) \frac{t^2}{2} - \left(\frac{F_2 - F_1}{m_0} \tau - V_0\right)t - \frac{F_1 - F_2}{m_0} \tau^2 + h_0 \quad (15)$$

Якщо прирівняти в рівнянні (14) швидкість до нуля, то можна знайти час піднімання на максимальну висоту, використавши W-функцію Ламберта<sup>1</sup>

<sup>1</sup>W-функція Ламберта  $y = W(x)$  це функція, яка задовольняє рівняння  $x = y \cdot e^y$ .



$$t_m = \frac{W\left(-\frac{(F_2 - F_1)e^{-\frac{\tau(F_2 - F_1) - V_0 m_0}{\tau(F_2 - m_0 g)}}}{F_2 - m_0 g}\right)\tau(F_2 - m_0 g) + \tau(F_2 - F_1) - m_0 V_0}{F_2 - m_0 g}. \quad (16)$$

Підставимо це значення в формулу (15), знайдемо максимальну висоту, на яку підніметься квадрокоптер.

Аналогічно, прирівнявши в формулі (15) висоту до  $h_0$ , знайдемо час, за який квадрокоптер повернеться на рівень  $h_0$ , а підставивши цей час у формулу (14), – швидкість  $V_{01}$ , з якою квадрокоптера повернеться на цей рівень. Модуль цієї швидкості завжди (крім  $\tau = 0$ ) більший від  $V_0$ .

Коли в разі повернення на рівень  $h_0$  перемкнемо напругу на двигуні на  $U_1$ , яка відповідає силі тяги  $F_1$ , то квадрокоптер відхилиться вниз від рівня  $h_0$  більше, ніж у разі відхилення догори. Отже, коливання квадрокоптера відносно рівня  $h_0$  наростатимуть.

Наприклад, якщо квадрокоптер піднявся на висоту  $h_0$  під дією сили  $F_1 = 5$  Н і має на цій висоті швидкість 1 м/с, то після перемикання сили на  $F_2 = 4,8$  Н зі сталою часу 0,3 с, опустившись знову на цю висоту, швидкість його дорівнюватиме вже -1,11 м/с.

На рис. 7 відображено рух квадрокоптера в разі перемикання напруги на висоті  $h_0$ .

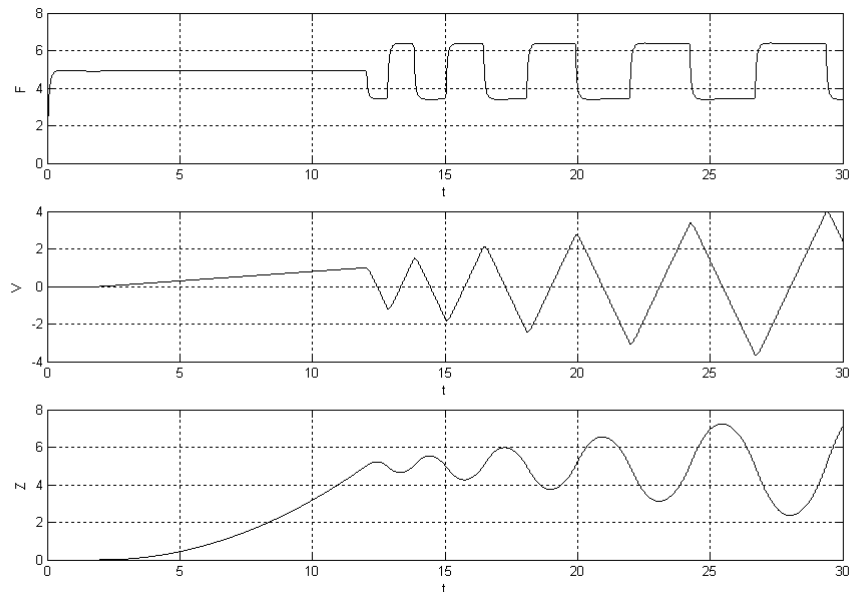
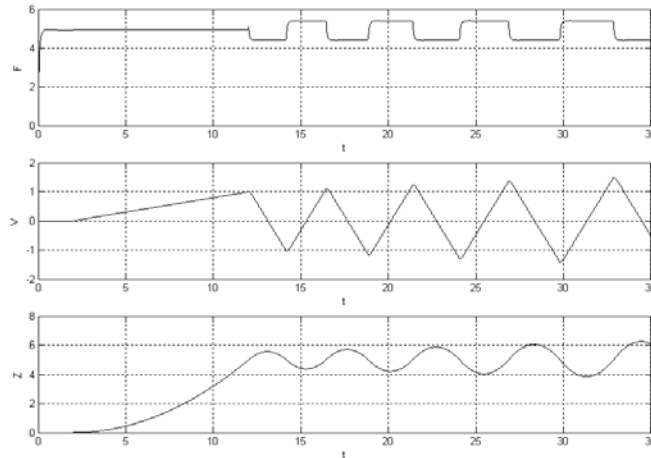
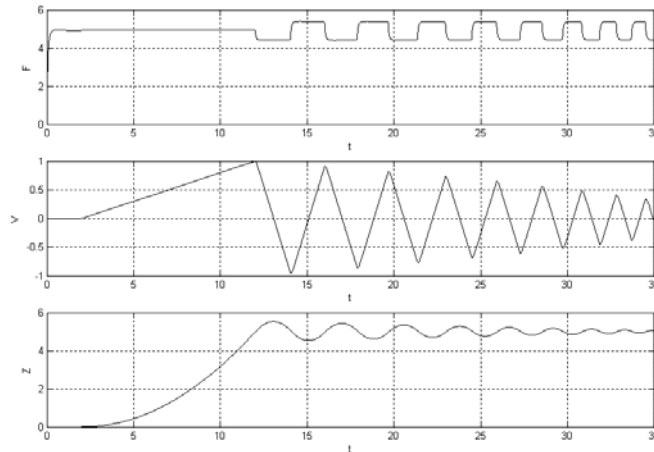


Рис. 7. Рух квадрокоптера в разі перемикання напруги на висоті  $h_0$ .

Очевидно, для того щоб не було наростання амплітуди коливань, потрібно перемикати напругу дещо раніше. Тобто прогнозуємо, що квадрокоптер досягне висоти  $h_0$  через час  $t_1$ , і в цей момент перемикаємо напругу двигуна.

Рис. 8. Рух квадрокоптера в разі прогнозування перетину висоти  $h_0$  через час  $t_1 = 0,02$  с.Рис. 9. Рух квадрокоптера в разі прогнозування перетину висоти  $h_0$  через час  $t_1 = 0,08$  с.

На рис. 8 показано рух квадрокоптера в разі прогнозування перетину висоти  $h_0$  через час  $t_1 = 0,02$  с, а на рис. 9 – через час  $t_1 = 0,08$  с. Як бачимо, за малого часу прогнозування квадрокоптер коливатиметься з наростаючою амплітудою, а за великого – зі спадною.

Врахування динамічних властивостей електродвигунів на процес вертикального злету квадрокоптера показує, що цей процес може бути коливним, коливним із наростаючою амплітудою коливань і затухаючою амплітудою коливань. Процес приземлення квадрокоптера при керуванні електродвигунами нічим не відрізняється від безінерційного керування. Всі досліджені режими вертикального злету і приземлення квадрокоптера залежать від навичок і вміння оператора і можуть зустрітися на практиці.

1. *Благітко Б., Мочульський Ю.* Плавний вертикальний злет квадрокоптера на задану висоту польоту // Електроніка та інформаційні технології: Матеріали IV наук.-практ. конф. – Львів, 2012. – С. 21–24.
2. *Синицький Л. А., Лисицька І. Н., Шумков Ю. Н.* Анализ нелинейных цепей с магнитными полупроводниковыми элементами. – Киев: Наук. думка, 1969. – 440 с.
3. *Мочульський Ю.* Matlab у фізичних дослідженнях: Навч.-метод. посіб. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 121 с.

## METHODS OF HAND FLYING BY QUADROKOPTER VERTICAL FLIGHT AND LANDING

**B. Blahitko, Yu. Mochulsky**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine  
blagitko@electronics.wups.lviv.ua, mochulsky@ukr.net*

There results of studies features of three main ways of hand flying for the vertical flight and landing quadcopter with regard to dynamic properties electromotor are described. The two-position method, the three-position method and optimal the two-position method are concluding. The operator is controlling by quadcopter with Earth. The operator can to variety a count force, a sign delta force and a time moments of varies. The input information is the count of fly height only and her time variety.

*Key words:* quadcopter, vertical flight, landing, two- and three-position control.

## СПОСОБЫ РУЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ВЗЛЁТОМ И ПОСАДКОЙ КВАДРОКОПТЕРА

**Б. Благітко, Ю. Мочульський**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франка,  
ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина  
blagitko@electronics.wups.lviv.ua, mochulsky@ukr.net*

Приведено результати досліджень особливостей трьох основних способів ручного управління вертикальним взльотом і посадкою квадрокоптера з урахуванням динамічних властивостей електродвигателів. Розглянуто способи двохпозиційного управління, трьохпозиційного і удосконалений спосіб двохпозиційного управління для оптимального виводу квадрокоптера на заданий режим. При цьому оператор управляє квадрокоптером, находясь на поверхності Землі. Оператор може змінювати величину приращення тягової сили винтов, знак приращення і моменти часу, коли відбуваються ці зміни. Вхідною інформацією служить значення висоти польоту квадрокоптера і її зміна з часом.

*Ключевые слова:* вертикальний взльёт, приземлення, позиційне управління.

Стаття надійшла до редколегії 04.05.2012

Прийнята до друку 19.06.2012