

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ ТА ТЕПЛОВОЇ ДИФУЗІЇ ПЛИНІВ МАНТІЙНИХ ПЛЮМІВ МАНТІЇ ЗЕМЛІ

В. Фурман, М. Хом'як

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

*вул. Грушевського, 4, 79005 м. Львів*

*fourman@franko.lviv.ua*

Запропоновано комп'ютерну методику моделювання теплоперенесення та теплової дифузії плинів плюмів мантії Землі. Розроблена модель плинів плюмів засвідчує, що ніжки плюмів руйнуються швидше, ніж їхні шапки, унаслідок теплової дифузії.

*Ключові слова:* моделювання, мантійні плюми, теплоперенесення, дифузія.

Процеси теплопровідності впливають на реологічні властивості порід у Землі, на фазові й мінералогічні переходи в корі та мантії й на фізико-хімічний склад планети. Прикладом може слугувати еволюція теплових плюмів у мантії Землі [1–6]. У системі мантія–кора можна виділити три головні теплові режими. По-перше, існують майже адіабатичні області [5], де адвективне вертикальне теплоперенесення переважає над іншими механізмами перенесення тепла. Напевно, майже вся нижня мантія (за винятком її нижньомантійного шару D''), де фазові переходи можуть сповільнювати конвективне теплоперенесення) належить до цієї категорії. По-друге, є області, у яких кількість енергії, перенесеної за допомогою адвекції, приблизно дорівнює кількості енергії, перенесеної за допомогою кондукції [3, 7]. До цієї категорії належить океанічна літосфера, шар D'' і частина літосфери під континентальною корою. І, нарешті, існують області, де переважає кондуктивне теплоперенесення. Їх називають кондуктивними шарами. Континентальна земна кора і прилегла до неї верхня мантія – це найважливіші приклади з цієї групи.

Деякі плюми чітко простежені до середніх мантійних глибин і не помітні в низах мантії [2–5, 7, 8]. В описі природних, особливо геодинамічних, процесів [1, 9], ми голов-но стикаємося з задачами, що мають безперервні параметри. Задачі з розривними параметрами середовища (наприклад, середовища із шаруватою структурою) можна звести до розв'язування системи рівнянь із безперервними параметрами з додатковими умовами у вигляді умов з'єднання на межах розривів. Задачі з розривними параметрами і/або розв'язками, у яких нас цікавить розв'язок саме в околицях розриву, розв'язують специфічними методами, зокрема методами, у яких поверхні розриву виділяють й опрацьовують безпосередньо. Для двовимірного випадку і сильнов'язкого нестисливого середовища у зв'язній двовимірній області  $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  необхідно знайти функцію  $T(x, y, t)$ , що задовольняє рівняння

$$\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] - \frac{k}{\rho C_p} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \right\} T(x, y, t) = Q(x, y, t) \quad (1)$$

за відповідних початкових  $T_0 = T(x_0, y_0, t)$  та граничних умов

$$k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} T + \alpha(T - T_C) = q, \quad (2)$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до межі області  $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ ;  $x, y$  – просторові координати;  $t$  – час;  $U, V$  – компоненти вектора швидкості руху середовища;  $\rho$  – густина середовища;  $C_p$  – теплоємність середовища;  $k$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\alpha$  – коефіцієнт теплового розширення;  $T_C$  – температура навколишнього середовища;  $q$  – густина потоку тепла;  $Q(x, y, t)$  – теплогенерування в середовищі. Якщо ввести безрозмірні змінні

$$T(x, y, t) = \tilde{T}(x, y, t) T_0, k = \tilde{k} k_0, C_p = \tilde{C}_p C_p^0, t = \frac{\tilde{t} b^2 \rho_0 C_p^0}{k_0}, \rho = \tilde{\rho} \rho_0,$$

$$(U, V) = \frac{(U, V)}{b \rho_0 C_p^0} k_0, x = \tilde{x} a, y = \tilde{y} b, Q(x, y, t) = \tilde{Q}(x, y, t) \frac{k_0 T_0}{b^2},$$

то за їхньою допомогою можна записати рівняння теплопровідності

$$\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right] - \frac{\tilde{k}}{\tilde{\rho} \tilde{C}_p} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right] \right\} \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) \quad (3)$$

і граничні умови

$$\left\{ \cos(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \sin(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_1} \right\} \tilde{T} = \frac{1}{\tilde{k} k_0} \left( b \frac{(q + \alpha T_C)}{T_0} - \alpha \tilde{T} \right). \quad (4)$$

Для числового розв'язування використовують кінцево-різницевий метод [8]. Задачу розв'язують на рівномірній просторовій сітці. Коефіцієнти рівняння теплопровідності передбачені кусково-безперервними, що накладає деякі обмеження на вид різницевої схеми. Тепер, з огляду на зазначені вище припущення і перетворення коефіцієнтів, формулювання задачі для числового розв'язування можна звести до такої процедури. Розглядають розв'язок  $T(x, y, t)$  диференціального рівняння

$$\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tilde{U}(x, y)}{a} \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{V}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] - k(x, y) \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \right\} T(x, y, t) = q(x, y, t),$$

$$\tilde{U}(x, y) = U(x, y) - \frac{1}{a} \frac{\partial k(x, y)}{\partial y}, \tilde{V}(x, y) = V(x, y) - \frac{1}{b} \frac{\partial k(x, y)}{\partial y},$$

який необхідно знайти для прямокутної області  $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  для всіх  $t \in [0, t_N]$ , на всіх границях якої задані граничні умови вигляду

$$a_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + a_2 T = a_3.$$

Далі будують кінцево-різницевий аналог просторового диференціального оператора. Побудова відбувається з точністю  $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$  на п'ятиточковому шаблоні форми "хрест":

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + U_{ij} \left[ \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} \right] + V_{ij} \left[ \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} \right] = \\ = k_{ij} \left[ \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{a^2 \Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] + q_{ij}, \\ U_{ij} = \tilde{U}(x_i, y_j), \quad V_{ij} = \tilde{V}(x_i, y_j) \end{aligned}$$

Такий спосіб побудови монотонних різницевих схем і побудовану вище різницеву схему для зведення до монотонного вигляду треба скоригувати за допомогою методу регуляризації [8]. Зазвичай, розглядають дві моделі еволюції мантийних плюмів: модель без мантийних плинів (модель 1) і модель за наявності мантийних плинів (модель 2). На рис. 1 показано початкові умови для обох моделей.

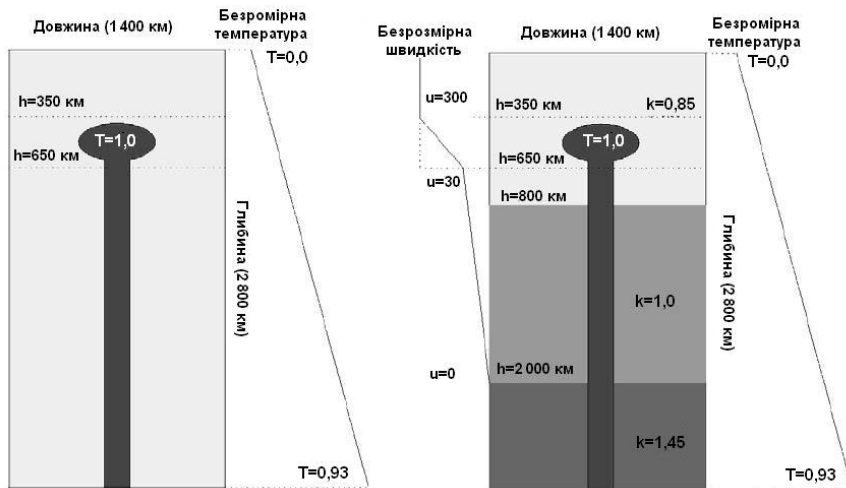


Рис. 1. Область моделювання, початкові умови та розподіл параметрів у числовій моделі 1 (ліворуч) і моделі 2 (праворуч)

Моделювання виконано у прямокутній області  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ , де  $a = 1400$  км – довжина моделі,  $b = 2800$  км – її глибина. Використано рівномірну сітку  $300 \times 300$  вузлів. На нижній і верхній границях моделі задано безрозмірну температуру  $T = 0,93$  (3 069 К) і  $T = 0$  К, відповідно; температура мантийного плюму  $T = 1,0$  (3 300 К). На вертикальних границях моделі задано нульовий тепловий потік та лінійну залежність початкової температури від глибини. Різниця між розмірною температурою плюму і температурою мантиї на нижній межі моделі  $T = 231$  К, що добре узгоджується з експериментальними

петрологічними спостереженнями. Така зміна коефіцієнта теплопровідності мантійних порід з глибиною відповідає експериментальним даним з вивчення фізичних характеристик мантійних порід за високих тисків і температур. Передбачають, що літосфера рухається з безрозмірною швидкістю  $U = 300$  (26,5 км/млн років) відносно мантії. Швидкість мантії залежить від глибини і є нульовою в нижніх шарах мантії. Відсутність конвективних плинів у низах мантії підтверджена експериментальними даними про фазові переходи в перовськіті за високих тисків і можливого різкого збільшення коефіцієнта теплопровідності. Кілька стадій дифузного ослаблення (руйнування) мантійного плюму показано на рис. 2.

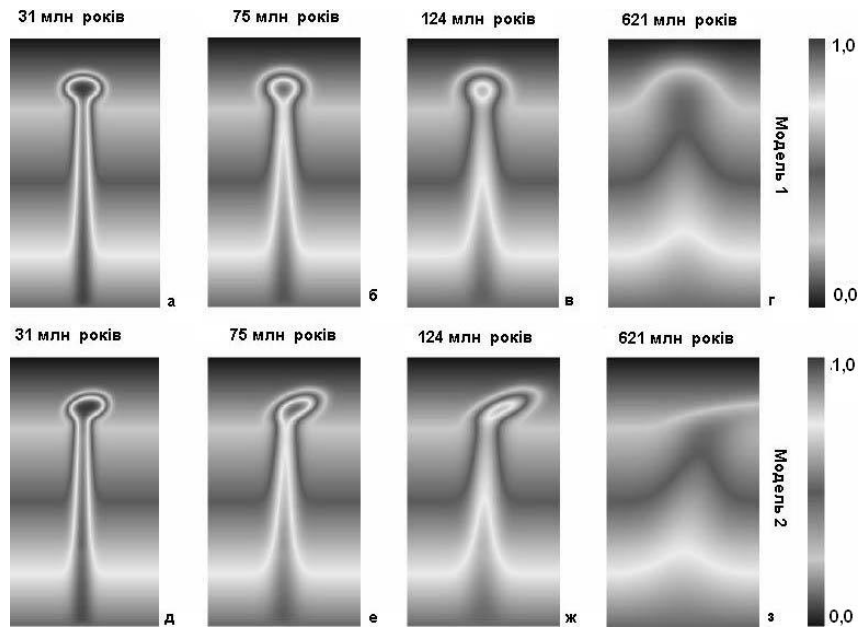


Рис. 2. Кілька стадій теплової дифузії плюму без мантійних плинів (модель 1, а–г) і в полі заданих швидкостей плинину (модель 2, д–з).

У випадку моделі 1 тепловий плюм зменшується в розмірах, і на середніх мантійних глибинах його ніжка зникає швидше від шапки плюму (див. рис. 2, в). У випадку моделі 2 тепловий плюм зменшується в розмірах, і його шапка зрушується щодо його ніжки. На середніх мантійних глибинах його ніжка зникає швидше від шапки плюму (див. рис. 2, е і ж), як і у випадку моделі 1, і швидше від ніжки плюму в моделі 1. Останнє пов'язане зі зростанням коефіцієнта теплопровідності з глибиною. Деформовану шапку плюму ще виразно видно після 75 млн років теплової дифузії плюму. Числові експерименти з вивчення мантійних плюмів засвідчують, що ніжки висхідних гарячих плюмів стають тонкими в разі збільшення числа Релея  $R_A$ . При  $R_A > 10^7$  (турбулентний режим) шапки теплових плюмів відокремлюються від їхніх ніжок. Ніжки плюмів можуть бути відділені

від шапок у разі сильних плинів у мантії через рух літосфери. У числових експериментах з'ясовано, що ніжки мантійних плюмів руйнуються швидше від шапок плюмів унаслідок теплової дифузії.

1. *Garnero E. J.* Heterogeneity of the lowermost mantle // *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* – 2000. – Vol. 28. – P. 509–537.
2. *Kumagai I.* On the anatomy of mantle plumes: effect of the viscosity ratio on entrainment and stirring // *Earth and Planetary Science Letters.* – 2002. – Vol. 198. – P. 211–224.
3. *Li Z.-X., Zhong S.* Supercontinent–superplume coupling, true polar wander and plume mobility: Plate dominance in whole-mantle tectonics // *Phys. of the Earth and Planet. Inter.* – 2009. – Vol. 176. – P. 143–156.
4. *Matyska C., Yuen D. A.* Are mantle plumes adiabatic // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2001. – Vol. 89. – P. 165–176.
5. *Montelli R., Nolet G., Dahlen F. et al.* Finite-frequency tomography reveals a variety of plumes in the mantle // *Science.* – 2004. – Vol. 303. – P. 338–343.
6. *McNamara A. K., Zhong S.* The influence of thermochemical convection on the fixity of mantle plumes // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2004. – Vol. 242. – P. 485–500.
7. *Garnero J., McNamara A. K.* Structure and Dynamics of Earth's Lower Mantle // *Science.* – 2008. – Vol. 320. – P. 626–628.
8. *Davaille A., Girard F., Bars M. Le.* How to anchor hotspots in a convecting mantle // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 2008. – Vol. 203. – P. 621–634.
9. *Cammarano F., Goes S., Vacher P., Giardini D.* Inferring upper-mantle temperatures from seismic velocities // *Phys. of the Earth and Plan. Int.* – 2003. – Vol. 138. – P. 197–222.

## MODELLING OF HEAT TRANSFER AND HEAT DIFFUSION IN THE EARTH'S MANTLE PLUMES

V. Fourman, N. Khomjak

*Ivan Franko National University of L'viv  
4 Hrushevskh St., UA-79005 Lviv, Ukraine  
fourman@franko.lviv.ua*

Computing methods for modelling of heat flow and thermal diffusion in the Earth's mantle plumes are suggested. A model for thermal diffusion in the mantle plumes indicates that the plume stems are destroyed faster than their caps, as a result of thermal diffusion.

*Key words:* modelling, mantle plumes, heat flow, diffusion.

---

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА И ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ  
В МАНТИЙНЫХ ПЛЮМАХ МАНТИИ ЗЕМЛИ****В. Фурман, Н. Хомяк**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко  
ул. Грушевского, 4, 79005 Львов, Украина.  
fourman@franko.lviv.ua*

Предложена компьютерная методика моделирования теплопереноса и тепловой диффузии потока плюмов мантии Земли. Разработанная модель тепловой диффузии мантийных плюмов указывает на то, что ножки плюмов разрушаются быстрее их шапок в результате тепловой диффузии.

*Ключевые слова:* моделирование, мантийные плюмы, теплоперенос, диффузия.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.2012

Прийнята до друку 17.04.2012